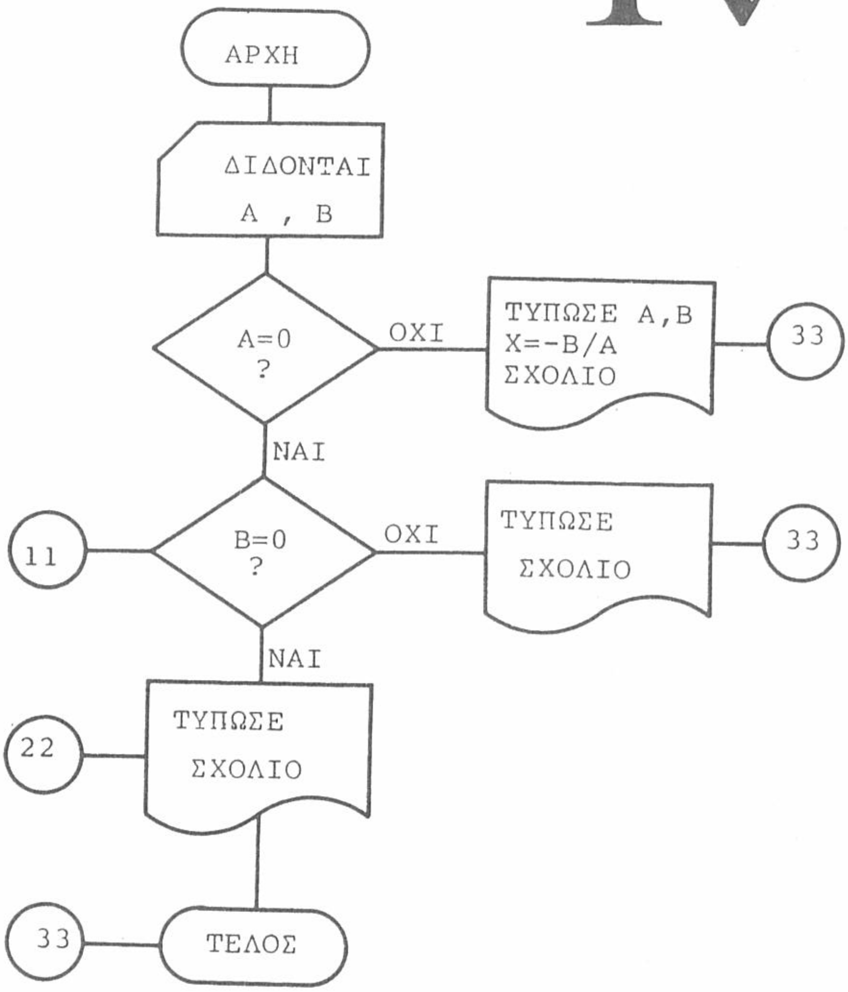
ΠΑΡΙΣ Κ. ΠΑΜΦΙΛΟΣ
ΕΠΙΚΟΥΡΙΚΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΚΡΗΤΗΣ

FORTRAN IV



ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΕ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β΄ ΕΚΔΟΣΙΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ Α. ΠΑΠΑΣΩΤΗΡΙΟΥ

῾Ο Πάρις Πάμφιλος γεννήθηκε τό 1950 στήν ᾿Αθήνα. Σπούδασε μαθηματικά στό ᾿Εθνικό καί Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο ᾿Αθηνῶν καθώς καί στά Πανεπιστήμια Βόννης καί Κολωνίας της Δυτικῆς Γερμανίας. Τό 1978 ἀνακηρύχθηκε διδάκτωρ τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Κολωνίας. ᾿Από τό 1975 ἐργάζεται ὡς ᾿Επιμελητής τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Βόννης, παραδίδοντας μαθήματα καί διευθύνοντας σεμινάρια σέ εἰδικά θέματα τῶν ἐφηρμοσμένων μαθηματικῶν καί τῆς διαφορικῆς γεωμετρίας. Τό 1984 ἐντάχθηκε ὡς ἐπικουρικός καθηγητής στό Πανεπιστήμιο Κρήτης.

ΠΑΡΙΣ Κ. ΠΑΜΦΙΛΟΣ
ΕΠΙΚΟΥΡΙΚΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

FORTRAN IV

ΕΚΔΟΣΕΙΣ — ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ
Α. ΠΑΠΑΣΩΤΗΡΙΟΥ
ΤΕΧΝΙΚΑ — ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ
ΣΤΟΥΡΝΑΡΑ 23 — ΑΘΗΝΑ 106 82 — ΤΗΛ. 36.41.826, 36.09.821

'Αφιέρωμα στούς γονεῖς μου
Κώστα καί 'Αντιγόνη

Πρόλογος

Ἀπό τό 1973 καί ἑξῆς εἶχα τήν δυνατότητα νά ἐργασθῶ μέ φοιτητές ὅλων τῶν ἐτῶν στήν φυσικομαθηματική σχολή τοῦ πανεπιστημίου τῆς Βόννης. Μιά ἐμπειρία τῶν χρόνων αὐτῶν ἦταν ἡ δημιουργία ἰσχυρῶν κινήτρων μαθήσεως καί ἀγάπης τῆς λεπτομέρειας πού διαπίστωσα χωρίς ἐξαίρεση σέ ὅλους ἐκείνους τούς φοιτητές, οἱ ὁποῖοι παράλληλα μέ τήν ἐκμάθηση τῆς θεωρίας ὑπολόγιζαν συγγεκριμένα παραδείγματα μέ τήν βοήθεια τοῦ ὑπολογιστῆ. Ἔχοντας κατά νοῦ τήν εὐνοϊκή αὐτή παιδαγωγική ἐπίδραση συνιστοῦσα καί θά συνιστῶ πάντοτε στούς ἀρχάριους φοιτητές τῶν φυσικομαθηματικῶν καί τεχνικῶν ἐπιστημῶν τήν παράλληλη ἐκμάθηση μιᾶς γλῶσσας προγραμματισμοῦ. Τό παρόν βιβλίο εἶναι ἡ ἔμπρακτή συμπαράστασή μου πρός ἐκείνους πού θά θελήσουν νά ἀκολουθήσουν αὐτή τήν σύσταση.

Ἡ FORTRAN IV προσφέρεται ἀπ᾽ αὐτήν τήν ἄποψη γιά τήν εὐκολία ἐκμαθήσεώς τής καί τήν τυποποίησή της, πού ἐπιτρέπει ἐφαρμογές ἀνεξαρτήτως τοῦ τύπου τοῦ χρησιμοποιουμένου ὑπολογιστῆ. Προσπαθῶντας νά ἐξαλείψω καί τά λίγα "βαρετά" περάσματα πού ἔχει νά ξεπεράση ὁ φοιτητής μαθαίνοντας τήν γλῶσσα κατά συμβατικό τρόπο, ὁδηγήθηκα στήν πρακτική αὐτή μέθοδο. "Πρακτική" διότι ἡ πρός μετάδοση γνώση περικλείεται κατά κανόνα στά ἴδια τά προγράμματα-παραδείγματα ἐντός κειμένου. Μέ τήν βοήθεια τῶν συντόμων ἑρμηνευτικῶν σχολίων πού συνοδεύουν κάθε τέτοιο πρόγραμμα θά πρέπει ὁ ἀναγνώστης νά στέκεται καί νά κατανοῆ πως καί τί κάνει τό κάθε πρόγραμμα. Τήν γνώση πού ἀποκτᾶ κατ᾽ αὐτό τόν τρόπο θά πρέπει κατόπιν νά τήν έμπαιδώνη μέ τήν βοήθεια τῶν ἀσκήσεων στό τέλος κάθε παραγράφου (γιά εὐκολία τοῦ ἀναγνώστη δίδονται οἱ λύσεις τῶν ἀσκήσεων στό τέλος τοῦ βιβλίου). Σέ ὅλο τό βιβλίο τό βάρος ἔχει τεθεῖ στήν γλῶσσα καί ὄχι στά μαθηματικά πού περιέχονται στά προγράμματα. Ἀπ' αὐτή τήν ἄποψη τό βιβλίο εἶναι αὐτοδύναμο. Μέ ὁρισμένες ἔννοιες πού ἀπαιτοῦν ηὐξημένη μαθηματική πεῖρα μπορεῖ ὁ ἀναγνώστης νά ἐξοικιώνεται κατ' ἀρχήν ὑπολογίζοντας μέ τήν βοήθεια τῶν προγραμμάτων μερικά παραδείγματα καί νά ἐμβαθύνη ἀργότερα ἀνατρέχοντας στήν βιβλιογραφία πού προτείνω καί σχολιάζω στήν §20. Ἡ ἀνάγνωση τῆς τελευταίας αὐτῆς παραγράφου θά μποροῦσε νά γίνη μέ ὠφέλεια καί πρίν τήν ἀνάγνωση τοῦ ὅλου βιβλίου. Ὅσον ἀφορᾶ τά προγράμματα, στό βιβλίο περιοριζόμεθα σέ στοιχεῖα τῆς ANSI-FORTRAN (ANSI ἀπό τό american national standards institute = ἀμερικανικό ἰνστιτοῦτο μέτρων καί σταθμῶν) τά ὁποῖα περιέχονται σάν γνήσιο ὑποσύνολο σχεδόν σέ ὅλους τούς μεταφραστές τῶν ὑπολογιστῶν πού κυκλοφοροῦν στό ἐμπόριο. Κάθε ἀπόκλειση ἀπό τήν ANSI-FORTRAN σημειώνεται ἀναλυτικά ἐντός κειμένου. Ὅλα τά προγράμματα τοῦ βιβλίου δοκιμάσθηκαν μέ τόν μεταφραστή WATFIV τοῦ ὑπολογιστῆ IBM-370/168 τοῦ πανεπιστημίου τῆς Βόννης. Ὁ χρόνος ἐκτελέσεως τῶν προγραμμάτων (ἐκτός τοῦ P15.1) εἶναι μικρότερος τῶν 3 δευτερολέπτων. Κατά συνέπεια εὑρίσκονται ἐντός τῶν πλαισίων πού ἐπιβάλουν συνήθως τά ὑπολογιστικά κέντρα γιά τήν ἐξάσκηση μαθητευομένων.

Πάρις Πάμφιλος　　　　　　Βόννη, Ἰούλιος τοῦ 1979

П Е Р І Е Х О М Е N А

1

<u>'Αριθμητικές πράξεις</u>

+ : πρόσθεση

- : άφαίρεση

* : πολλαπλασιασμός

/ : διαίρεση

**: ὕψωση σέ δύναμη

<u>REAL (=πραγματικές) μεταβλητές</u>

Στό παρακάτω πρόγραμμα, δίδομε στόν ὑπολογιστή δύο άριθμούς μέ τά ὀνόματα ALPHA καί BHTA .
Τό πρόγραμμα ὑπολογίζει καί τυπώνει κατά σειράν :
τούς δοθέντας άριθμούς, τό ἄθροισμα, τή διαφορά, τό γινόμενο, τό πηλίκο καί τήν δεύτερη δύναμη τοῦ ALPHA .

<u>Πρόγραμμα :</u>

```
C   P1.1   ARITHMITIKES PRAXEIS
C
C   ORISMOS METABLHTON
        REAL ALPHA,BHTA,ATHR,DIAF,GIN,PH,E
C
C   ORISMOS TOY ALPHA KAI BHTA
        ALPHA=10.20
        BHTA=5.10
C
C   EKTELESH TON PRAXEON
        ATHR=ALPHA+BHTA
        DIAF=ALPHA-BHTA
        GIN=ALPHA*BHTA
        PH=ALPHA/BHTA
        E=ALPHA**2
```

(σχ. 1)

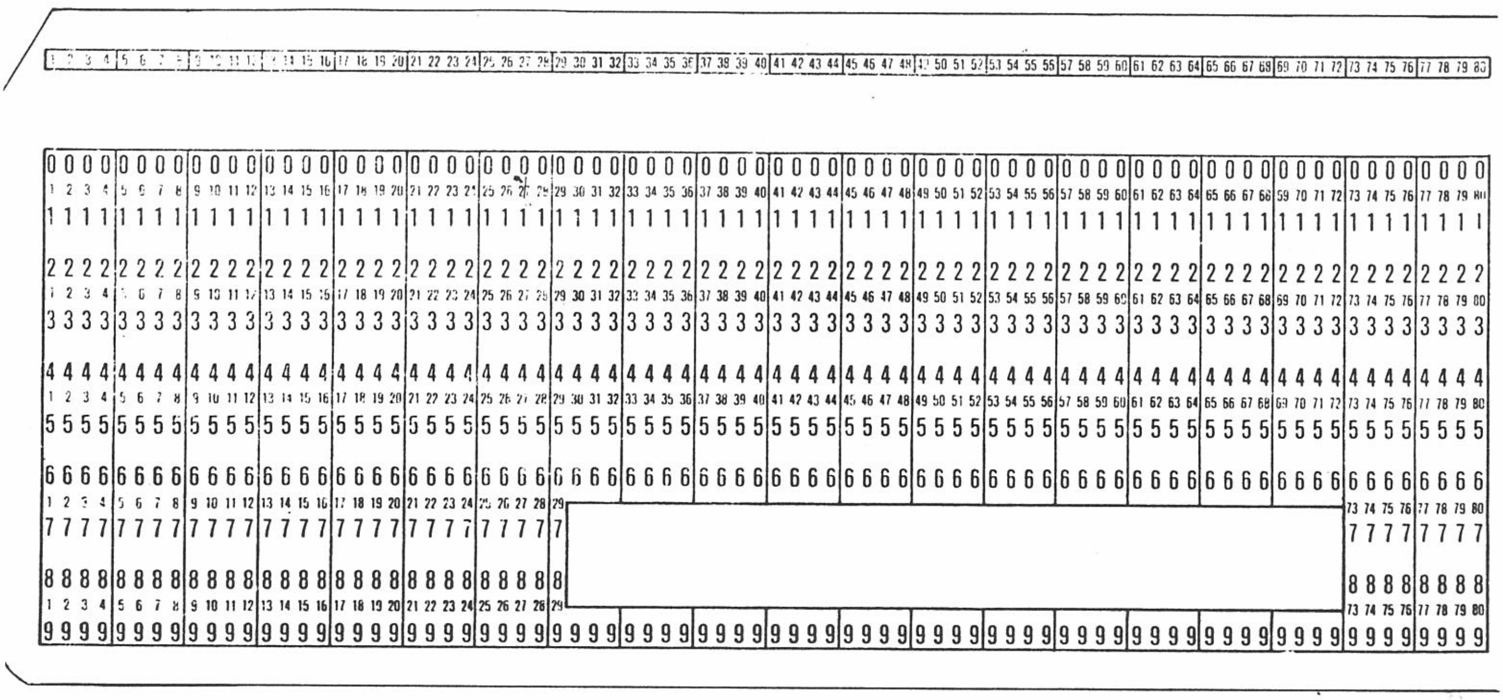
```
C
C   EKDOSH APOTELESMATON
      WRITE(6,100) ALPHA,BHTA,ATHR,DIAF,GIN,PH,E
  100 FORMAT(1H ,10X,E15.6)
      STOP
      END
```

<u>'Αποτελέσματα :</u>

```
0.102000E 02
0.510000E 01
0.153000E 02
0.510000E 01
0.520200E 02
0.200000E 01
0.104040E 03
```

(σχ.2)

α) Κάθε γραμμή τοῦ προγράμματος παραπάνω τυπώνεται σέ μιά κάρτα (=card), δές σχ.3.



(σχ.3)

β) Κάρτες πού ἔχουν στήν πρώτη στήλη τό C δέν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν ἀπό τόν ὑπολογιστή. Χρησιμεύουν γιά σχόλια (=comments) πού διευκολύνουν τήν ἑρμηνεία τοῦ προγράμματος.

γ) Ὅλες οἱ ἄλλες γραμμές τοῦ σχ.1 λέγονται ἐντολές (=statements) καί τυπώνονται ἀπ' τήν ἕβδομη στήλη τῆς κάρτας μέχρι τήν 72η , συμπεριλαμβανομένων.

δ) ALPHA, BHTA, ATHR, DIAF, κ.τ.λ. εἶναι ὀνόματα μεταβλητῶν. Ἡ FORTRAN ἐπιτρέπει ὀνόματα πού ἀποτελοῦνται ἀπό ἕνα ἕως ἕξι γράμματα (A - Z) ἤ ψηφία (1,2,3,4,5,6,7,8,9,0).

ε) Ὁ πρῶτος χαρακτήρας ἑνός ὀνόματος πρέπει νά εἶναι γρᾶμμα.

ζ) Στήν ἀρχή τοῦ προγράμματος χρειάζεται ἡ ἐντολή

```
      REAL ALPHA,BHTA,...κ.τ.λ.
```

γιά νά καθορίση τό εἶδος τῶν μεταβλητῶν, ἐν προκειμένω, πραγματικούς ἀριθμούς.

η) Οἱ δύο ἐντολές

```
          WRITE(6,100) ALPHA,BHTA,ATHR,DIAF,...κ.τ.λ.
      100 FORMAT(1H ,...κ.τ.λ.
```

καθορίζουν τόν τρόπο μέ τόν ὁποῖο θά τυπωθοῦν τά ἀποτελέσματα ἀπό τόν ταχυεκτυπωτή τοῦ ὑπολογιστῆ. Τίς ἐντολές αὐτές θά τίς ἀναλύσουμε ἀργότερα, πρός τό παρόν θά τίς χρησιμοποιοῦμε ὅπως ἔχουν προκειμένου νά τυπώσουμε ἕναν οἱονδήποτε πραγματικό ἀριθμό.

θ) Οἱ πραγματικοί ἀριθμοί γράφονται στήν FORTRAN μέ δυό τρόπους. Ὁ πρῶτος τρόπος ἀντιστοιχεῖ στήν κανονική γραφή τοῦ ἀριθμοῦ π.χ. 10.20 ὁ δεύτερος τρόπος εἶναι ὁ τοῦ σχ.2 :

10.20 = +0.102000E+02

Γιά θετικούς ἀριθμούς τό + μπορεῖ νά παραληφθῆ.

0.102000E+02 συμβολίζει τόν ἀριθμό :

$$0.102000 \cdot 10^2 = 10.20$$

Ἀναλόγως οἱ ἄλλοι ἀριθμοί τῶν ἀποτελεσμάτων ἔχουν ὡς ἑξῆς :

0.510000E 01 = $0.510000 \cdot 10 = 5.10$

0.153000E 02 = $0.153000 \cdot 10^2 = 15.30$

0.104040E 03 = $0.104040 \cdot 10^3 = 104.040$

Οἱ ἐντολές

```
      ALPHA = 10.20
      ALPHA = 0.1020E 02
      ALPHA = 0.1020E+2
      ALPHA = 0.102E2
      ALPHA = 0.0102E3
```

εἶναι ὅλες ἰσοδύναμες μεταξύ τους.

ι) Σημείωσε ὅτι στήν ἀρχή καί στό τέλος κάθε προγράμματος πρέπει νά μπαίνουν ὁρισμένες πρόσθετες κάρτες πού δέν ἀνήκουν στήν FORTRAN ἀλλά ἐξαρτῶνται ἀπό τήν χρησιμοποιούμενη μάρκα τοῦ ὑπολογιστῆ. Γιά τό ποιές εἶναι αὐτές οἱ J.C.L - κάρτες (ὅπως λέγονται) ρώτησε τόν χειριστή τοῦ ὑπολογιστῆ ἤ ἕναν πεπειραμένο προγραμματιστή τοῦ ἰδίου ὑπολογιστικοῦ κέντρου.

Στό ἑπόμενο πρόγραμμα δίδονται πέντε ἀριθμοί A1,A2,A3, A4,A5 καί ὑπολογίζεται κατά σειράν τό

X = A1+A2+A3+A4+A5

Y = A1-A2+A3-A4+A5 καί τό

Z = X/Y

<u>Πρόγραμμα :</u>

```
C  P1.2   ARITHMITIKES PRAXEIS
C
C
C  ORISMOS METABLHTON
      REAL A1,A2,A3,A4,A5,X,Y,Z
      A1=1.11
      A2=1.0011
      A3=1.000011
      A4=1.00000011
      A5=1.0000009
C
C  EKTELESH TON PRAXEON
      X=A1+A2+A3+A4+A5
      Y=A1-A2+A3-A4-A5
      Z=X/Y
C
C  EKDOSH APOTELESMATON
      WRITE(6,100) A1,A2,A3,A4,A5,X,Y,Z
  100 FORMAT(1H ,10X,E15.6)
      STOP
      END
```

(σχ.4)

<u>'Αποτελέσματα :</u>

```
 0.111000E 01
 0.100110E 01
 0.100001E 01
 0.100000E 01
 0.100000E 01
 0.511111E 01
-0.891088E 00
-0.573581E 01
```

(σχ.5)

κ) Ἡ σειρά μέ τήν ὁποία τυπώνονται οἱ μεταβλητές στά ἀποτελέσματα (σχ. 5) καθορίζεται ἀπό τήν σειρά ἐξ ἀριστερῶν πρός τά δεξιά μέ τήν ὁποία ἐμφανίζονται τά ὀνόματα τῶν μεταβλητῶν αὐτῶν ἐντός τῆς ἐντολῆς WRITE(6,100) ...κ.τ.λ.
Ἔτσι στό σχ.5 τυπώνονται κατά σειράν τά A1,A2,A3,A4,A5,X,Y,Z.
λ) Κάθε πραγματικός ἀριθμός πρέπει νά γράφεται μέ ὑποδιαστολή (τελεία), ἄλλως προκύπτουν σφάλματα. Ἔτσι λ.χ. τό 5 θεωρούμενο σάν πραγματικός ἀριθμός πρέπει νά γραφῆ 5.0 ἤ 0.5E1 ἤ 5.00 ἤ 5. κ.ο.κ.

Ἀσκήσεις

P1.3 Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο γιά πέντε δοθέντας ἀριθμούς A1,A2,A3,A4,A5, εὑρίσκει καί τυπώνει τά

X = (A1**2+A2**2+A3**2+A4**2+A5**2)/5.

Y = (A1+A2+A3+A4+A5)/5.

Z = X/Y

P1.4 Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο δοθέντος X εὑρίσκει καί τυπώνει τούς ἀριθμούς

Y = X**0.5

Z = X**X

P1.5 Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο τυπώνει τούς ἀριθμούς 1.0, 1.1, 1.01, 1.001, 1.0001, 1.00001, 1.000001, 1.0000001 καθώς καί τούς

$1+16^{-1}$, $1+16^{-2}$, $1+16^{-3}$, $1+16^{-4}$, $1+16^{-5}$, $1+16^{-6}$.

P1.6 Ἐκτέλεσε τήν πρόσθεση τριῶν ἀριθμῶν π.χ.

A1 = 5.555555

A2 = 6.666666

A3 = 7.777777

καθ' ὅλες τίς δυνατές διατάξεις καί τύπωσε τά ἀποτελέσματα.

2

Ἡ ἰσότης στήν FORTRAN

Ἀλγεβρικές παραστάσεις

Ἡ ἰσότης στήν FORTRAN εἶναι δυναμική, ἡ ἐντολή A = B, σημαίνει ὅτι ἡ τιμή τῆς μεταβλητῆς B μεταβιβάζεται στήν A. Ἔτσι λ.χ. ἔχει νόημα ἡ ἐντολή

$$A = A + 1.5$$

Στό δεξιό μέρος τῆς ἰσότητος αὐτῆς χρησιμοποιεῖται ἡ παλαιά τιμή τοῦ A π.χ. 3.2, ἐκτελοῦνται οἱ πράξεις 3.2 + 1.5 = 4.7 καί τό ἀποτέλεσμα 4.7 ὁρίζεται σάν νέα τιμή τοῦ A.

Στό ἑπόμενο πρόγραμμα δίδεται τό X καί ὑπολογίζεται τό

$$Y = X**8 + X$$

Πρόγραμμα :

```
C  P2.1   H ISOTHS STHN FORTRAN
C
C
C  ORISMOS METABLHTON
      REAL X,Y
      X=1.578
C
C  YPOLOGISE TO Y=X**8+X
      Y=X*X
      Y=Y*Y
      Y=Y*Y+X
C
C
C  EKDOSH APOTELESMATON
      WRITE(6,100) X,Y
  100 FORMAT(1H ,10X,E15.6)
      STOP
      END
```

(σχ.1)

'Αποτελέσματα :

0.157800E 01
0.400244E 02

(σχ.2)

α) Μετά τήν έκτέλεση τῆς έντολῆς Y = X*X ἡ τιμή τοῦ Y ἰσοῦται μέ X^2, μετά τήν έκτέλεση τῆς Y = Y*Y ἡ τιμή τοῦ Y ἰσοῦται μέ X^4, τέλος μετά τήν έκτέλεση τῆς Y = Y*Y+X ἡ τιμή τοῦ Y εἶναι ἡ ζητουμένη $Y = X^8+X$.

Μέ τήν βοήθεια τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων καί τῶν παρενθέσεων μποροῦμε νά μεταφράσωμε στήν FORTRAN μαθηματικές ἀλγεβρικές παραστάσεις οἱασδήποτε μορφῆς. 'Ο ἑπόμενος πίνακας περιέχει μερικά παραδείγματα.

Μαθηματικός τύπος	'Αντίστοιχη έντολή τῆς FORTRAN
$y = x^{-1}$	Y = 1./X
$z = x(-y)$	Z = X*(-Y) ἤ Z = -X*Y
$y = x + 2$	Y = X + 2.
$y = \frac{x+1}{x-1}$	Y = (X+1.)/(X-1.)
$z = \frac{xy}{x+y+3}$	Z = (X*Y)/(X+Y+3.)
$z = \frac{1}{3xy}$	Z = 1./(3.*X*Y)
$z = \sqrt{(x+y)(x-y)}$	Z = ((X+Y)*(X-Y))**0.5
$z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$	Z = (X**2+Y**2)**(-0.5)
$z_\alpha = \sqrt{xy(1-\frac{x^2}{(x+y)^2})}$	ZA=(X*Y*(1.-(X**2)/((X+Y)**2)))**0.5

β) Κατά τήν έκτέλεση τῶν πράξεων έντός μιᾶς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως ἰσχύουν οἱ ἑξῆς ἱεραρχικοί κανόνες.

1ον) έκτελοῦνται ὑψώσεις σέ δύναμη,

2ον) έκτελοῦνται πολλαπλασιασμοί καί διαιρέσεις,

3ον) έκτελοῦνται προσθέσεις καί ἀφαιρέσεις.

γ) Σέ περίπτωση ἰσοδυνάμων (ἱεραρχικά) πράξεων, ἡ έκτέλεση προχωρεῖ ἐξ ἀριστερῶν πρός τά δεξιά. Ἔτσι λ.χ. ἡ 5η έντολή στόν πίνακα παραπάνω εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν

Z = X*Y/(X+Y+3.)

Ὁμοίως ἡ 6η εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν

Z = 1./3./X/Y

Ἡ 9η ἐντολή τοῦ πίνακα ἰσοδυναμεῖ μέ τήν

ZA = (X*Y*(1.-X**2/(X+Y)**2))**0.5

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα ὑπολογίζει τό ἐμβαδόν Ε ἑνός τριγώνου μέ πλευρές a, b, c βάσει τοῦ τύπου τοῦ Ἥρωνα

$$E = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ὅπου

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Πρόγραμμα :

```
C   P2.2    EMBADON TRIGONOY, TYPOS TOY HRONA
C
C
C   ORISMOS METABLHTON
      REAL A,B,C,S,E
      A=2.
      B=3.
      C=4.
C
C   O TYPOS TOY HRONA
      S=0.5*(A+B+C)
      E=(S*(S-A)*(S-B)*(S-C))**0.5
C
C   EKTYPOSH APOTELESMATON
      WRITE(6,100) A,B,C,S,E
  100 FORMAT(1H ,10X,E15.6)
      STOP
      END
```

(σχ.3)

Ἀποτελέσματα :

```
0.200000E 01
0.300000E 01
0.400000E 01
0.450000E 01
0.290474E 01
```

(σχ.4)

'Ασκήσεις

P2.3 Ποία έντολή ίσοδυναμεῖ μέ τίς έντολές

```
Y=X*X
Y=Y*Y
Y=Y*Y+X
```

τοῦ P2.1 ;

P2.4 Γρᾶψε τίς έντολές FORTRAN πού άντιστοιχοῦν στούς έπόμενους μαθηματικούς τύπους, χρησιμοποιῶντας ὅσο τό δυνατόν λιγώτερες παρενθέσεις.

$$y=1+\frac{x}{100}$$

$$y=a\left(1+\frac{x}{100}\right)^{10}$$

$$z=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$y=5x^2\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

$$y=x\left(\frac{x}{2}\sqrt{3}+3h\right)$$

$$y=2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$$

$$m_c=\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{4}}$$

$$K=\frac{1}{4}\sqrt{4p^2q^2-(b^2+d^2-a^2-c^2)^2}$$

Γιά τούς έπόμενους τύπους πάρε π=3.141592

$$E=\pi\rho^2$$

$$M_{\pi\varepsilon\rho}=2\pi\rho$$

$$E_{\varepsilon\lambda}=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

$$T=\pi R(R+\sqrt{R^2+h^2})$$

$$s=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-4}}$$

P2.5 'Υπολόγισε μέ τό P2.2 τό έμβαδόν ένός τριγώνου μέ πλευρές a=80, b=90, c=100.

P2.6 Κατασκεύασε πρόγραμμα τό όποῖο δοθέντος τριγώνου μέ πλευρές a=22, b=23, c=24 ὑπολογίζει

1ον) τό ἐμβαδόν E τοῦ τριγώνου μέ τόν τύπο τοῦ Ἥρωνα

2ον) τά τρία ὕψη τοῦ τριγώνου h_a, h_b, h_c βάσει τῶν τύπων $h_a = \frac{2E}{a}$, $h_b = \frac{2E}{b}$, $h_c = \frac{2E}{c}$

3ον) τό ἐμβαδόν $E_{ποδ}$ τοῦ τριγώνου μέ πλευρές h_a, h_b, h_c

4ον) τυπώνει κατά σειράν τά a, b, c, E, h_a, h_b, h_c, $E_{ποδ}$.

P2.7 Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο τυπώνει τά 1/3, 1/7, 1/11, 1/13, τό ἄθροισμά τους καθώς καί τόν ἀριθμό

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{17} \right)^{-1/2}$$

P2.8 Ὑπολόγισε καί τύπωσε τούς ἀριθμούς

$$\sqrt[13]{13} \; , \quad \sqrt[3]{0.01212} \; , \quad \sqrt[27]{345679}$$

P2.9 Βρές μέ τόν τύπο τοῦ Ἥρωνα τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου μέ πλευρές

A = 10

B = 5

C = 4

P2.10 Δῶσε τό P2.1 στόν ὑπολογιστή μέ X=1.E50 .

3

INTEGER (=ἀκέραιες) μεταβλητές

Προκαθορισμός τοῦ τύπου τῶν μεταβλητῶν

Ἐκτός τῶν μεταβλητῶν τοῦ τύπου REAL ἡ FORTRAN διαθέτει καί μεταβλητές τοῦ τύπου INTEGER.

Στό ἑπόμενο πρόγραμμα δίδονται δύο θετικοί ἀκέραιοι M, N καί ὑπολογίζεται τό πηλίκον καί τό ὑπόλοιπον P καί Y τῆς διαιρέσεως τοῦ M διά τοῦ N .

Πρόγραμμα :

```
C   P3.1    EYRESH TOY PHLIKOY KAI YPOLOIPOY
C           DYO THETIKON AKERAION
C
C   ORISMOS METABLHTON
        INTEGER M,N,P,Y
        M=112357
        N=5311
C
C   BRES TO PHLIKO =P KAI TO YPOLOIPO = Y     }
        P=M/N                                  } (*)
        Y=M-N*P                                }
C
C   TYPOSE TA APOTELESMATA
        WRITE(6,200) M,N,P,Y
  200   FORMAT(1H ,10X,I15)
        STOP
        END
```

(σχ.1)

'Αποτελέσματα :

```
112357
  5311
    21
   826
```

(σχ.2)

α) Στήν FORTRAN γίνεται διάκριση μεταξύ πραγματικών (=REAL) άριθμῶν καί ἀκεραίων (=INTEGER) ἀριθμῶν.

β) 'Η ANSI- FORTRAN δέν ἐπιτρέπει "μικτές" πράξεις ἀκεραίων μέ πραγματικούς.

γ) Οἱ ὁδηγίες τοῦ FORMAT εἶναι ἄλλες γιά πραγματικούς καί ἄλλες γιά ἀκεραίους ἀριθμούς. Σύγκρινε λ.χ. τίς FORMAT ἐντολές στά P2.2 καί P3.1 .

δ) Τό (*) μέρος τοῦ προγράμματος χρειάζεται μιάν ἐξήγηση. Στήν FORTRAN τό πηλίκον δύο ἀκεραίων M, N εἶναι πάλι ἀκέραιος, ἀκριβέστερα ἰσχύει

M/N = ἀκέραιο μέρος τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ M/N, π.χ.

8/3 = 2.6666....	,	στήν FORTRAN	8/3 = 2
15/4 = 3.75	,	" " "	15/4 = 3
1/4 = 0.25	,	" " "	1/4 = 0
-5/3 = -1.666....	,	" " "	-5/3 = -1

ε) 'Η ἐντολή P=M/N δίδει στό P τήν τιμή τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ M/N, τό ὁποῖο ὅμως εἶναι ἀκριβῶς καί τό πηλίκον τοῦ M διά τοῦ N. Y=M-N*P εἶναι τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ M διά τοῦ N.

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα ὑπολογίζει γιά δοθέν κεφάλαιο A τοκισμένο μέ P% τόκο, τό τελικό κεφάλαιο B μετά ἀπό N χρόνια.

'Πρόγραμμα :

```
C  P3.2   TOKISMOS KEFALAIOY
C
C
      A=10.
      P=5.
      N=50
```

(σχ.3)

```
C
C   YPOLOGISMOS TOY TELIKOY KEFALAIOY
      B=A*(1.+P/100.)**N
C
      WRITE(6,100) A,P,B
      WRITE(6,200) N
  100 FORMAT(1H ,10X,E15.6)
  200 FORMAT(1H ,10X,I15)
      STOP
      END
```

(σχ. 3 συνέχεια)

'Αποτελέσματα :

```
0.100000E 02
0.500000E 01
0.114670E 03
        50
```

(σχ. 4)

ζ) Τό πρόγραμμα P3.2 θά ἔπρεπε κανονικά νά εἶχε στήν ἀρχή τίς ἑξῆς ἐντολές : REAL A,P,B

INTEGER N

μέ τίς ὁποῖες θά καθορίζαμε τούς ἀντίστοιχους τύπους τῶν μεταβλητῶν. 'Εν τούτοις οἱ ἐντολές αὐτές παραλήφθηκαν γιατί βασιστήκαμε στόν ἑξῆς κανόνα τῆς FORTRAN :

1ον) 'Ονόματα μεταβλητῶν τῶν ὁποίων τό πρῶτο γράμμα εἶναι A,B,...,H ἤ O,P,...,Z παριστοῦν REAL (=πραγματικούς) ἀριθμούς.

2ον) 'Ονόματα μεταβλητῶν τῶν ὁποίων τό πρῶτο γράμμα εἶναι I, J, K, L, M, N παριστοῦν INTEGER ἀριθμούς.

Οἱ προηγούμενοι 2 κανόνες ἀποτελοῦν τήν λεγομένη "Συνθήκη προκαθορισμοῦ τοῦ τύπου τῶν μεταβλητῶν τῆς FORTRAN" (=type declaration by the predefined specification).

Τῆς συνθήκης αὐτῆς ὑπερισχύει ὁ ἀναλυτικός καθορισμός (=explicit specification) τοῦ τύπου τῶν μεταβλητῶν μέσω τῶν ἐντολῶν : REAL <u>λιστα</u>

INTEGER <u>λιστα</u>

ὅπου <u>λιστα</u> ἀκολουθία ὀνομάτων μεταβλητῶν, τά ὁποῖα χωρίζονται μεταξύ τους μέ κόμματα. ῎Ετσι λ.χ. ἡ ἐντολή

REAL A1,A2,N1,N2,N3

καθορίζει ὅτι οἱ μεταβλητές N1,N2,N3 εἶναι (ἀντίθετα πρός τό 2ον) τοῦ τύπου REAL . 'Επίσης λόγω τοῦ 1ον) εἶναι ἡ προηγούμενη ἐντολή ἰσοδύναμη μέ τήν

REAL N1,N2,N3

η) Σέ ὁρισμένες περιπτώσεις ἐπιτρέπει ἡ ANSI - FORTRAN "μικτές" πράξεις, δηλαδή πράξεις μεταξύ μεταβλητῶν διαφορετικοῦ τύπου π.χ. ἐπιτρέπεται ἡ ὕψωση πραγματικοῦ ἀριθμοῦ σέ ἀκεραία δύναμη Y=X**N, ἄλλες περιπτώσεις θά γνωρίσουμε παρακάτω (§ 13).

θ) Σημείωσε ὅτι κάθε ὑπολογιστής θέτει ὁρισμένους περιορισμούς στά μεγέθη τῶν ἀριθμῶν πού μπορεῖ νά ἐπεξεργασθῆ. Γιά τούς περιορισμούς τοῦ ὑπολογιστοῦ τοῦ δικοῦ σου ὑπολογιστικοῦ κέντρου πρᾶξε ὅπως στό 1.ι).

Ἀσκήσεις

P3.3 Ἐπιτρέπεται νά ἀφαιρέσουμε ἀπό τό P2.2 τήν ἐντολή
REAL A,B,C,S,E ;

P3.4 Δοθέντων ἀκεραίων M, N πότε συμφωνοῦν οἱ δύο τιμές :
1ον) M/N σάν πραγματικός ἀριθμός,
2ον) M/N κατά τήν FORTRAN ;

P3.5 Δοθέντων τῶν ἀκεραίων M, N ὁρίζουμε τήν M1=M-M/N*N τί σχέση διέπει τά M, N ὅταν τό M1 ἔχει τήν τιμή 0 ; Τί παριστᾶ τό M1 ἐν γένει ;

P3.6 Τί ἀποτέλεσμα δίδει τό P3.1 ἐάν ἐπιτρέψουμε στούς ἀκέραιους M, N νά ἔχουν ἀρνητικό πρόσημο; Τί συμβαίνει ὅταν τό M εἶναι μικρότερο τοῦ N ;

P3.7 Ἰσχύουν οἱ τύποι :

$$s_1 = 1+2+3+...+N = N(N+1)/2$$

$$s_2 = 1^2+2^2+3^2+...+N^2 = N(N+1)(2N+1)/6$$

$$s_3 = 1^3+2^3+3^3+...+N^3 = (N(N+1)/2)^2$$

Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο ὑπολογίζει τά s_1, s_2, s_3 βάσει τῶν παραπάνω τύπων γιά N=20 .

4

Τό λογικό IF (=ἐάν)

Ἡ ἐντολή GO TO (=πήγαινε στό)

Κανονικά ὁ ὑπολογιστής διατρέχει τό πρόγραμμα κάρτα πρός κάρτα καί μέ τήν σειρά πού τοῦ τίς δίνομε νά τίς διαβάση. Μή τετριμμένα προβλήματα ἐν τούτοις ἀπαιτοῦν ἀλλαγή τῆς φυσιολογικῆς ροῆς τοῦ προγράμματος, ἀνάλογα μέ τά δεδομένα τοῦ προβλήματος.

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα τό ὁποῖο ὑπολογίζει καί τυπώνει τά τετράγωνα τῶν πρώτων 2000 φυσικῶν ἀριθμῶν, δίδει ἕνα ἁπλό παράδειγμα ἀλλαγῆς τῆς ροῆς τοῦ προγράμματος.

Πρόγραμμα :

```
C  P4.1    TA TETRAGONA TON FYSIKON ARITHMON
C          MEXRI TO 2000.
C
C  ARXIKH TIMH TOY  I
      I=0
C  AYXHSH TOY I KATA 1
   10 I=I+1                                    } (*)
C
C  YPOLOGISMOS TOY TETRAGONOY TOY I
      J=I**2
C
C  TYPOSE TA I KAI J SE MIA GRAMMH
      WRITE(6,300) I,J
  300 FORMAT(1H ,10X,2I15)
C
C  EAN I=2000  STAMATHSE, ALLOS PHGAINE
C  STHN ENTOLH ME MARKA  10
      IF(I.EQ.2000) STOP
      GO TO 10                (σχ.1)
      END
```

<u>'Αποτελέσματα :</u>

1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100
...	...
1612	2598544
1613	2601769
1614	2604996
1615	2608225
1616	2611456
1617	2614689
1618	2617924
1619	2621161
1620	2624400
...	...

(σχ.2)

α) 'Εντολές στίς όποῖες "πηδᾶμε" ἀπό ἕνα ὁρισμένο σημεῖο τοῦ προγράμματος πρέπει νά εἶναι ἐφοδιασμένες μέ μιά μάρκα (=label). Στό P4.1 μιά τέτοια ἐντολή εἶναι ἡ

10 I=I+1

β) 'Η μάρκα μιᾶς ἐντολῆς εἶναι ἕνας οἱοσδήποτε φυσικός ἀριθμός μεταξύ τοῦ 1 καί τοῦ 99999 τόν ὁποῖον τυπώνουμε στίς 5 πρῶτες στῆλες τῆς κάρτας πού περιέχει τήν ἐντολή (δές 1.γ).

γ) Ἕνα ἄλλο παράδειγμα μάρκας εἶναι τό 300 μέ τό ὁποῖο εἶναι ἐφοδιασμένη ἡ ἐντολή FORMAT(....

δ) 'Η ἐντολή FORMAT ἔχει πάντα μιά μάρκα (δές καί τά προηγούμενα προγράμματα).

ε) 'Η ἐντολή WRITE (=γράψε) ἔχει πάντα τήν μορφή

WRITE(N1,N2) <u>λίστα</u>

ὅπου N1 εἶναι ἕνας ἀριθμός πού χαρακτηρίζει τό μηχάνημα ἐκτυπώσεως. Ἔχει καθιερωθῆ N1=6 νά συμβολίζη τόν ταχυεκτυπωτή τοῦ ὑπολογιστῆ.

N2 εἶναι ἡ μάρκα τοῦ FORMAT μέ τήν βοήθεια τοῦ ὁποίου γράφεται ἡ <u>λίστα</u> .

<u>λίστα</u> εἶναι μιά ἀκολουθία ἀπό ὀνόματα μεταβλητῶν ἤ σταθερῶν πού χωρίζονται μεταξύ τους μέ ἕνα κόμμα (δές τίς ἐντολές WRITE στά προηγούμενα προγράμματα).

ζ) Ἡ ἐντολή FORMAT περιέχει ἐντός τῶν παρενθέσεων ὁδηγίες-κώδικες μέ τήν βοήθεια τῶν ὁποίων τυπώνεται ἡ <u>λίστα</u> τοῦ WRITE. Στό πρόγραμμα P4.1 στήν ἐντολή

```
300 FORMAT(1H ,10X,2I15)
```

1H , σημαίνει : τύπωσε στήν ἑπομένη γραμμή,
10X, " " : προχώρησε στήν παρούσα γραμμή κατά 10 τυπογραφικά διαστήματα πρός τά δεξιά,
2I15, " " : τύπωσε δύο 15-ψήφιους ἀκεραίους.

η) Ἡ ἐντολή IF(I.EQ.2000) STOP μεταφράζεται ὡς ἑξῆς: Ἐάν I=2000 τότε σταμάτησε (=STOP).

θ) Ἐντός τῶν παρενθέσεων τοῦ IF ἔχομε μιά λογική πρόταση: I.EQ.2000 (EQ ἀπό τό equal =ἴσον). Τούτη ἔχει δυό δυνατότητες ἤ νά εἶναι ἀληθής ὁπότε ἐκτελεῖται τό STOP , ἤ νά εἶναι ψευδής ὁπότε τό πρόγραμμα προχωρεῖ μέ τήν ἑπομένη τοῦ IF ἐντολή.

ι) Τό GO TO 10
καθορίζει ὅτι ἡ ἑπομένη ἐντολή πού πρέπει νά ἐκτελεστῆ εἶναι ἐκείνη πού ἔχει μάρκα τό 10.

κ) Ἡ γενική μορφή τοῦ IF ἔχει ὡς ἑξῆς.

```
.
.
.
IF(λογική πρόταση) ἐντολή-α
ἐντολή-β
.
.
.
```

Ἡ λειτουργία του ἔχει ὡς ἑξῆς:

1ον) Ὅταν ἡ λογική πρόταση εἶναι ἀληθής τότε ἐκτελεῖται ἡ ἐντολή-α.

2ον) Ὅταν ἡ λογική πρόταση εἶναι ψευδής τότε ἐκτελεῖται ἡ ἑπομένη του IF ἐντολή-β.

Μέ τό IF λοιπόν μποροῦμε νά "διακλαδίζουμε" ἕνα πρόγραμμα.

λ) Με το GO TO μ
"πηδᾶμε" στήν ἐντολή μέ μάρκα μ.

Οἱ δύο αὐτές δυνατότητες, νά διακλαδίζουμε ἕνα πρόγραμμα καί νά πηδᾶμε σέ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο, ἐπιτρέπουν τήν κατασκευή πιό συνθέτων προγραμμάτων.

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα τυπώνει ἕνα πίνακα μέ τά τετράγωνα καί τούς κύβους τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν μέχρι τό 100.

Πρόγραμμα :

```
C   P4.2    PINAKAS TETRAGONON KAI KYBON TON
C           PROTON 100 FYSIKON ARITHMON
C
C   ARXIKH TIMH TOY I
        I=0
C
C   AYXHSH TOY I KATA 1
    17  I=I+1
C
C   TETRAGONO TOY I
        I2=I*I
C
C   KYBOS TOY I
        I3=I2*I                                          (*)
C
C   TYPOSE TA I, I2, I3 SE MIA SEIRA
        WRITE(6,400) I,I2,I3
  400   FORMAT(1H ,10X,3I15)
C
C   EAN I=100 STAMATA, ALLOS PHGAINE
C   STHN ENTOLH ME MARKA = 17
        IF(I.EQ.100) STOP
        GO TO 17
        END
```

(σχ.3)

Ἀποτελέσματα :

1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729
...	...	...
87	7569	658503
88	7744	681472
89	7921	704969
90	8100	729000
91	8281	753571
92	8464	778688
93	8649	804357
94	8836	830584
95	9025	857375
96	9216	884736
97	9409	912673
98	9604	941192
99	9801	970299
100	10000	1000000

(σχ.4)

'Ασκήσεις

P4.3 Παρατήρησε τίς έντολές FORMAT στά P4.1 καί P4.2, τί σημαίνει τό 3I15 ;

P4.4 'Εξήγησε τή λειτουργία τῆς έντολῆς (*) στό P4.1

P4.5 'Εξήγησε τή λειτουργία τῆς έντολῆς (*) στό P4.2

P4.6 Τροποποίησε τό πρόγραμμα P4.2 ἔτσι ὥστε νά ὑπολογίζη καί νά τυπώνη τόν πίνακα τῶν τετραγώνων καί τῶν κύβων τῶν φυσικῶν άριθμῶν ν μέ $N1 \leq \nu \leq N2$.
Τύπωσε τόν άντίστοιχο πίνακα γιά N1=1000, N2=1100.

P4.7 Κατασκεύασε πρόγραμμα, τό ὁποῖο ὑπολογίζει καί τυπώνει τά άθροίσματα $s(n)=1+2+3+\ldots+n$ γιά $n=1,2,\ldots,100$.

P4.8 'Αναλόγως πρός τό P4.7 τύπωσε τόν πίνακα τῶν άθροισμάτων $s_2(n)=1+2^2+3^2+\ldots+n^2$ γιά $n=1,2,\ldots,100$.

P4.9 Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο τυπώνει τόν πίνακα τῶν άθροισμάτων $s_3(n)=1+2^3+3^3+\ldots+n^3$ γιά $n=1,2,\ldots$ μέχρι τοῦ μεγίστου δυνατοῦ n γιά τόν ὁποῖον $s_3(n) \leq 2^{31}-1$.

P4.10 'Αναλόγως πρός τό P4.9 τύπωσε τόν πίνακα τῶν άθροισμάτων $s_4(n)=1+2^4+3^4+\ldots+n^4$ γιά $n=1,2,\ldots$ μέχρι τοῦ μεγίστου δυνατοῦ n γιά τόν ὁποῖον $s_4(n) \leq 2^{31}-1$.

P4.11 Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο τυπώνει τόν πίνακα τῶν n, $s(n)$, $s_2(n),\ldots, s_5(n)$ μέχρι τοῦ μεγίστου δυνατοῦ n γιά τόν ὁποῖο ἰσχύει $s_5(n) \leq 2^{31}-1$.

'Η δυσκολία στά τρία τελευταῖα προγράμματα εἶναι νά έκτελεστοῦν οἱ πράξεις χωρίς ποτέ τό ένδιάμεσο άποτέλεσμα νά ὑπερβῆ τόν άριθμό $2^{31}-1$ ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ μεγαλύτερος θετικός άκέραιος πού μπορεῖ νά έπεξεργασθῆ ὁ IBM-370 .

5

Λογικό διάγραμμα (=flowchart)

.EQ. , .NE. , .GT. , .GE. , .LT. , .LE.

Μέ τόν "Εὐκλείδιο ἀλγόριθμο" εὑρίσκομε τόν μέγιστο κοινό διαιρέτη (μ.κ.δ) δύο ἀκεραίων θετικῶν $M \geq N$ ὡς ἑξῆς :

1ον) Διαιροῦμε τό M μέ τό N καί βρίσκομε τό πηλίκον P καί τό ὑπόλοιπον Y, γιά τά ὁποία ἰσχύει $M=P \cdot N+Y$.

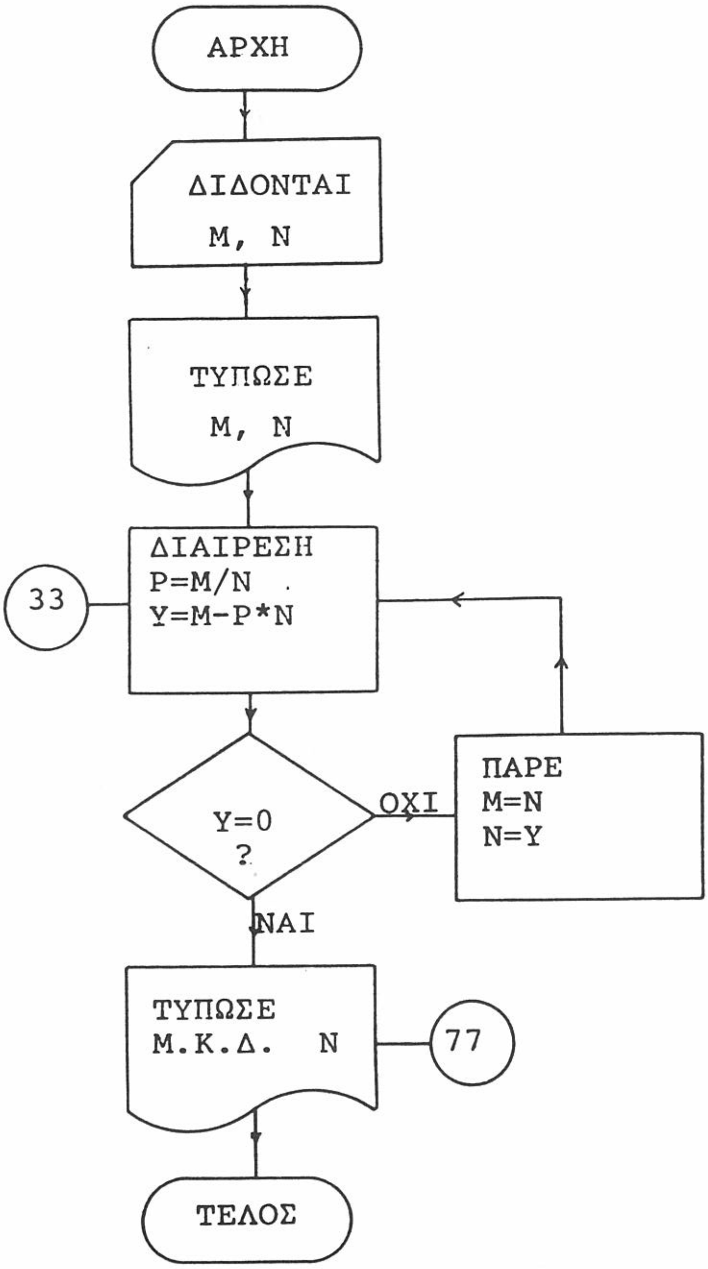
2ον) Ἐάν Y=0, τότε εἶναι τό N ὁ ζητούμενος μ.κ.δ.

3ον) Ἐάν $Y \neq 0$ τότε παίρνομε M=N καί N=Y καί ἐπαναλαμβάνομε τήν διαδικασία τοῦ 1ον).

4ον) Κάποτε θά φτάσωμε σέ ἕνα ζεῦγος M, N ἔτσι ὥστε τό M νά διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ N. Τοῦτο τό N ἀκριβῶς εἶναι ὁ ζητούμενος μ.κ.δ τοῦ ἀρχικοῦ ζεύγους M, N .

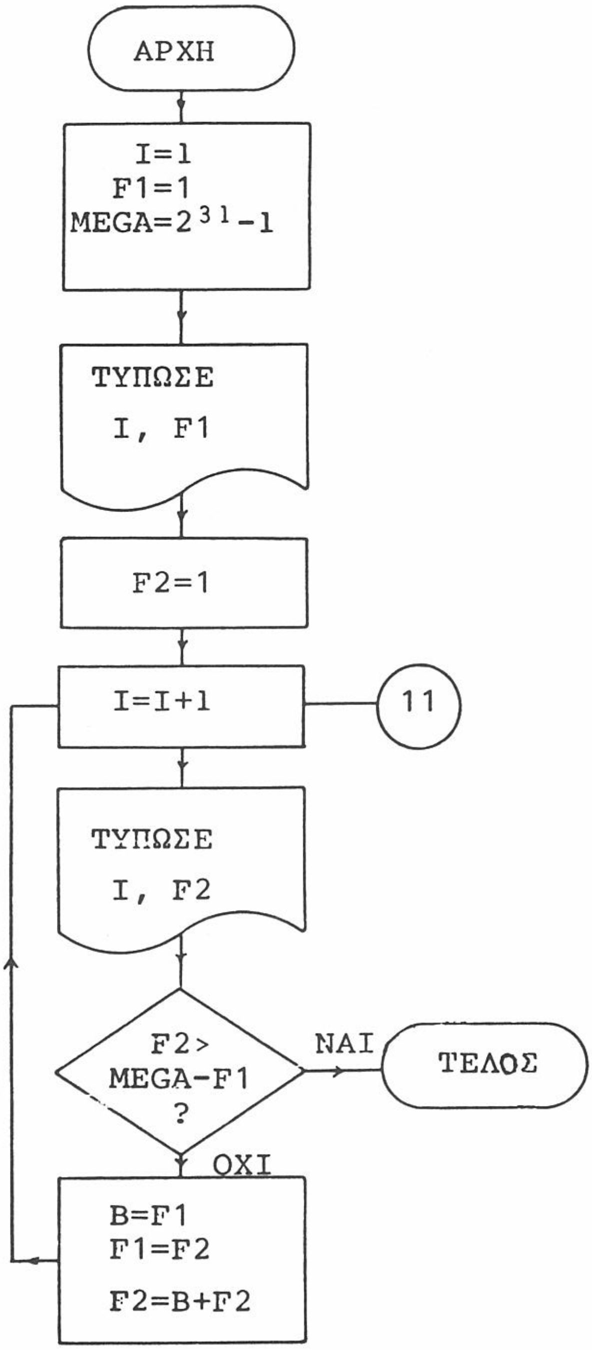
Τά τέσσερα αὐτά βήματα περιγράφουν μία λύση (ἀλγόριθμο) τοῦ μαθηματικοῦ προβλήματος τῆς εὑρέσεως τοῦ μ.κ.δ. δύο ἀριθμῶν. Στήν κατασκευή τοῦ ἀντιστοίχου προγράμματος μᾶς διευκολύνει τό λογικό διάγραμμα (flowchart) τοῦ ἀλγορίθμου, τό ὁποῖο συνοψίζει παραστατικά τά βήματα ἀπ' τά ὁποῖα ἀποτελεῖται ὁ ἀλγόριθμος καθώς καί τήν σειρά μέ τήν ὁποία αὐτᾶ ἐκτελοῦνται.

Τό λογικό διάγραμμα τοῦ Εὐκλειδίου ἀλγορίθμου ἔχει ὡς ἑξῆς:



ΕΥΚΛΕΙΔΙΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ

(σχ.1)



ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΟΥ FIBONACCI

(σχ.2)

<u>Πρόγραμμα :</u>

```
C  P5.1   ALGORITHMOS TOY EYKLEIDOY
C
C  DIDONTAI TA  M, N
      INTEGER P,Y
      M=525
      N=225
C
C  TYPOSE TA M,N
      WRITE(6,300) M,N
  300 FORMAT(1H ,10X,2I15)
```

(σχ.3)

```
C
C   PHLIKO = P, YPOLOIPO = Y  THS DIAIRESEOS M/N
    33 P=M/N
       Y=M-P*N
C
C   EAN Y=0, TOTE N=M.K.D TON M,N
C   ALLOS PARE  M=N, N=Y KAI EPANELABE THN DIADIKASIA
       IF(Y.EQ.0) GO TO 77      )
       M=N                      )
       N=Y                      ) (*)
       GO TO 33                 )
    77 WRITE(6,300) N
       STOP
       END
```

(σχ.3 συνέχεια)

<u>'Αποτελεσματα :</u>

```
525          225
 75
```

α) Τήν διαδικασία πού ἀκολουθήσαμε στό προηγούμενο πρόγραμμα ἀκολουθοῦμε ἐν γένει προκειμένου νά κατασκευάσωμε ἕνα κάπως συνθετώτερο πρόγραμμα. Τήν ἐργασία τήν χωρίζουμε σέ τρία διαδοχικά στάδια

1ον) Λύση τοῦ μαθηματικοῦ προβλήματος (εὕρεση ἀλγορίθμου)

2ον) κατασκευή τοῦ λογικοῦ διαγράμματος

3ον) κατασκευή προγράμματος βάσει τοῦ λογικοῦ διαγράμματος.

Οἱ "ἀριθμοί τοῦ Fibonacci" ὁρίζονται ἐπαγωγικά μέσω τῶν

F(1)=1
F(2)=1
F(3)=2=F(1)+F(2)
F(4)=3=F(2)+F(3)   καί ἐν γένει
F(N)=F(N-1)+F(N-2)

Ζητοῦμε ἕνα πρόγραμμα τό ὁποῖο τυπώνει τόν πίνακα ὅλων τῶν ἀριθμῶν τοῦ Fibonacci πού εἶναι μικρότεροι τοῦ $2^{31}-1$. Τό λογικό διάγραμμα τοῦ ἑπομένου προγράμματος δίδεται στό σχ.2.

<u>Πρόγραμμα :</u>

```
C   P5.2   OI ARITHMOI TOY FIBONACCI
C
C   F1= ARITHMOS TOY FIBONACCI
C   F2= O EPOMENOS TOY F1 ARITHMOS TOY FIBONACCI
C   B = BOHTHITIKH METABLHTH
C   I = DEIKTHS TOY OROY THS AKOLOYTHIAS
```

(σχ.4)

```
      INTEGER F1,F2,B
C
C  ARXIKES TIMES
      I=1
      F1=1
      MEGA=2**31-1
      WRITE(6,300) I,F1
  300 FORMAT(1H ,10X,2I15)
      F2=1
   11 I=I+1
      WRITE(6,300) I,F2
C
C  KATASKEYH TOY EPOMENOY OROY F1+F2
C  EF OSON TOYTOS DEN XEPERNA TO  MEGA.
      IF(F2.GT.MEGA-F1) STOP
      B=F1
      F1=F2                          (II)       (I)
      F2=B+F2
      GO TO 11
      END
```

(σχ. 4 συνέχεια)

<u>'Αποτελέσματα :</u>

1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55
11	89
12	144
13	233
14	377
15	610
16	987
17	1597
18	2584
19	4181
20	6765
21	10946
22	17711
23	28657
24	46368
25	75025
26	121393
27	196418
28	317811
29	514229
30	832040
31	1346269
32	2178309
33	3524578
34	5702887
35	9227465
36	14930352
37	24157817
38	39088169
39	63245986
40	102334155
41	165580141
42	267914296
43	433494437
44	701408733
45	1134903170
46	1836311903

(σχ. 5)

β) Τό .GT. (ἀπό τό Greater Than=μεγαλύτερο ἀπό) εἶναι ὅπως καί τό .EQ. πού γνωρίσαμε στό 4.η ἕνας ἀπό τούς 6 τελεστές συσχετισμοῦ πού περιέχει ἡ FORTRAN . Οἱ τελεστές συσχετισμοῦ συγκρίνουν δύο ἀριθμητικές παραστάσεις A, B (πραγματικές ἤ ἀκέραιες).

A.EQ.B	σημαίνει	A=B	(equal=ἴσον)
A.NE.B	" "	A≠B	(not equal=μή ἴσον)
A.GT.B	" "	A>B	(greater than=μεγαλύτερο ἀπό)
A.GE.B	" "	A≥B	(greater or equal=μεγαλ. ἤ ἴσο)
A.LT.B	" "	A<B	(less than=μικρότερο ἀπό)
A.LE.B	" "	A≤B	(less or equal=μικρότερο ἤ ἴσο)

γ) Τό ἀποτέλεσμα τῆς συγκρίσεως μέσω ἑνός τελεστοῦ συσχετισμοῦ εἶναι μιά λογική πρόταση, ἡ ὁποία θά εἶναι ἤ ἀληθής ἤ ψευδής (δές τή λειτουργία τοῦ IF πού περιγράφεται στό 4.θ καί 4.κ).

Γιά δοθέντα φυσικό ἀριθμό N τό λεγόμενο "N-παραγοντικό" N! ὁρίζεται ὡς ἑξῆς :

0!=1

1!=1

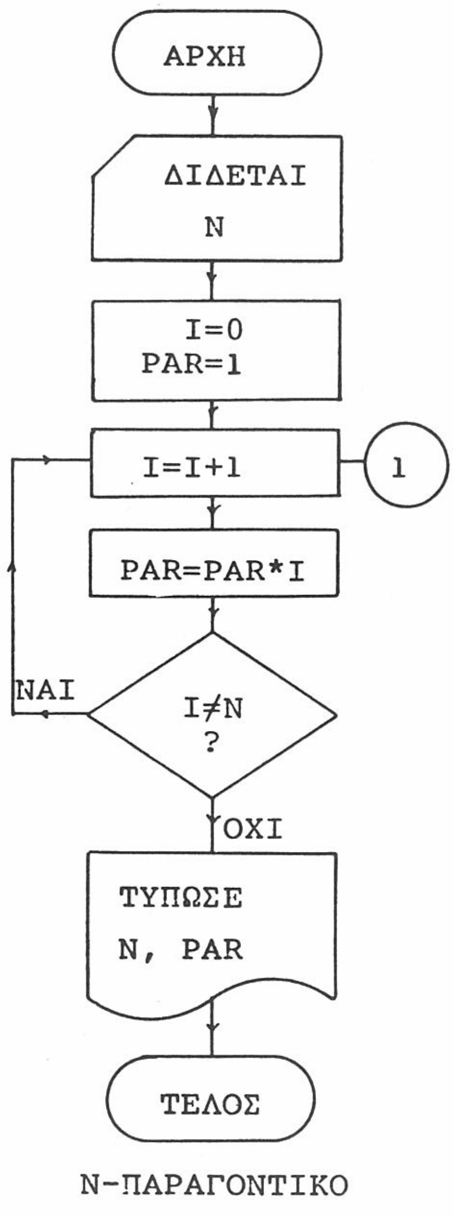
2!=1·2 =2

3!=1·2·3 =6

...

N!=1·2·3·....·N

Ζητοῦμε ἕνα πρόγραμμα τό ὁποῖο δοθέντος ἑνός N ὑπολογίζει καί τυπώνει τό N! . Τό ἀντίστοιχο λογικό διάγραμμα εἶναι τό τοῦ σχήματος 6 .



(σχ.6)

N-ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΟ

Πρόγραμμα :

```
C  P5.3   TO N-PARAGONTIKO
C
      INTEGER PAR
      N=10
      I=0
      PAR=1
C
C  TO I LAMBANEI DIADOXIKA TIS TIMES 1,2,...,N
C  TIS OPOIES POLLAPLASIASOME METAXY TOYS KAI
C  EYRISKOME TO N-PARAGONTIKO = PAR
    1 I=I+1                                      }
      PAR=PAR*I                                  }  (*)
      IF(I.NE.N) GO TO 1                         }
      WRITE(6,300) N,PAR
  300 FORMAT(1H ,10X,2I15)
      STOP
      END
```

(σχ.7)

'Αποτελέσματα :

```
   10          3628800
```

'Ασκήσεις

P5.4 'Εξήγησε τήν λειτουργία τοῦ (*) τμήματος τοῦ προγράμματος P5.1 .

P5.5 'Εξήγησε τά τμήματα (II) καί (I) τοῦ προγράμ. P5.2

P5.6 'Εξήγησε τήν λειτουργία τοῦ (*) τμήματος τοῦ προγράμματος P5.3 .

P5.7 'Επιτρέπεται νά ἀφαιρέσουμε ἀπό τό P5.1 τήν εντολή INTEGER P,Y ; Γιατί ;

P5.8 Τό ἐλάχιστο κοινό πολλαπλάσιο ε.κ.π. δύο φυσικῶν ἀριθμῶν α, β τό εὑρίσκομε ὡς ἑξῆς :

1ον) εὑρίσκομε τόν μ.κ.δ. δ τῶν α, β,

2ον) ἐκτελοῦμε τήν διαίρεση $\alpha_1=\alpha/\delta$

3ον) τό ε.κ.π. ἰσοῦται μέ τόν ἀριθμό $\alpha_1 \cdot \beta$

Κατασκεύασε ἕνα πρόγραμμα τό ὁποῖο ὑπολογίζει καί τυπώνει τό ε.κ.π. δύο δοθέντων ἀριθμῶν α, β .

P5.9 Πόσοι ἀριθμοί μεταξύ τῶν 1,2,...,999999 εἶναι πολλαπλάσιοι τοῦ 5 ;

P5.10 Πόσοι ἀριθμοί μεταξύ τῶν 1,2,...,999999 εἶναι πολλαπλάσιοι (ταυτόχρονα) τοῦ 3 τοῦ 7 καί τοῦ 17 ;

P5.11 Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο τυπώνει τά N! γιά ὅλα τά N γιά τά ὁποῖα τό $N! \leq 2^{31}-1$.

*P5.12 Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο εὑρίσκει πόσοι ἀριθμοί μεταξύ τῶν 1,2,3,...,999999 περιέχουν τό ψηφίο 5 (π.χ. 5, 253, 511, 10513 εἶναι τέτοιοι ἀριθμοί).

*P5.13 Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο δοθέντος φυσικοῦ ἀριθμοῦ εὑρίσκει καί τυπώνει τούς πρώτους παράγοντες ἀπ' τούς ὁποίους ἀποτελεῖται π.χ.

$12=2\cdot2\cdot3$

$8085=3\cdot5\cdot7\cdot7\cdot11$

$1122=2\cdot3\cdot11\cdot17$

P5.14 Ὑπολόγισε μέ τό P5.3 τό 18!

P5.15 Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο δοθέντων τῶν A, B, C

1ον) Εὑρίσκει τό μέγιστο AMEG ἐξ' αὐτῶν,

2ον) Ἐξετάζει ἄν $S=\frac{1}{2}(A+B+C)$ > AMEG,

3ον) Στήν περίπτωση πού S > AMEG ὑπολογίζει μέ τόν τύπο τοῦ Ἥρωνα τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου, ἄλλως σταματᾶ.

P5.16 Εἶναι δυνατόν σέ ἕνα καί τό αὐτό πρόγραμμα νά ὑπάρχουν δύο διαφορετικές ἐντολές μέ τήν αὐτή μάρκα ;

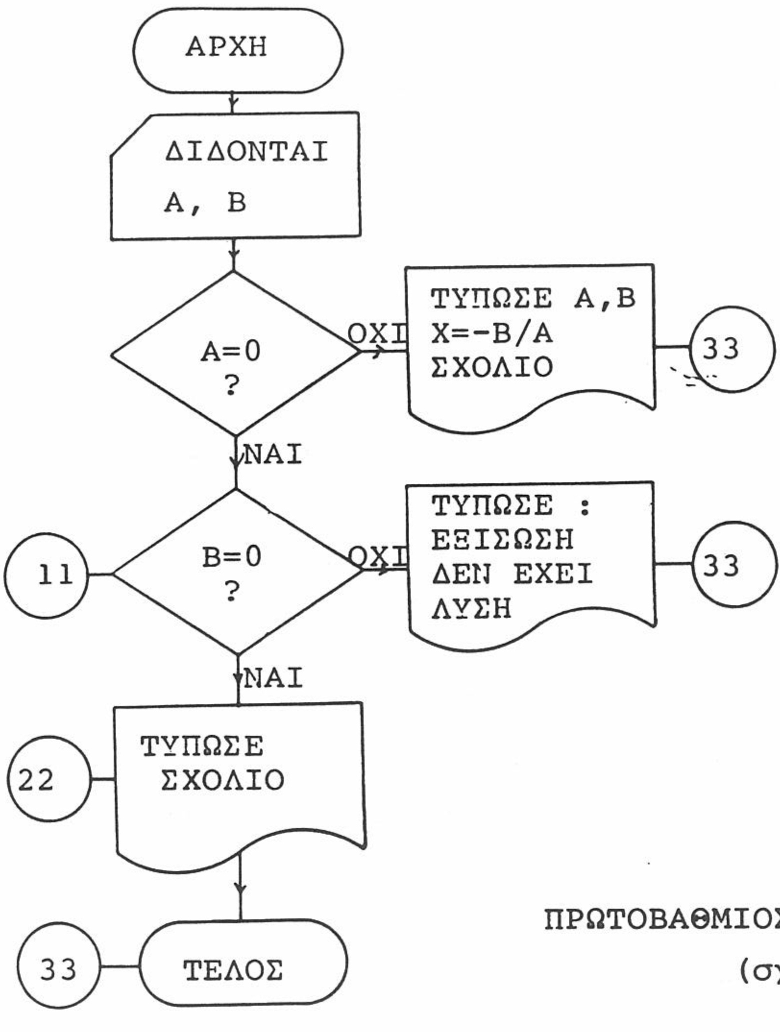
6

ʽΗ ἐντολή FORMAT

Οἱ κώδικες wH, wX, aEw.d, aIw, nPaEw.d

ʽΟ πρῶτος χαρακτήρας μιᾶς τυπωμένης γραμμῆς

ʽΗ ἕκτη στήλη μιᾶς κάρτας



ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΟΣ ΕΞΙΣΩΣΗ
(σχ.1)

Τό προηγούμενο λογικό διάγραμμα ἀντιστοιχεῖ στό πρόγραμμα (δές σχ.2) τό ὁποῖο γιά δοθέντα A,B λύνει τήν ἐξίσωση

$$A\cdot X+B=0$$

ταυτόχρονα δέ μέ τή λύση τυπώνει καί σχετικό σχόλιο.

<u>Πρόγραμμα :</u>

```
C  P6.1    LYSH PROTOBATHMIOY EXISOSEOS
C          A*X+B=0
C
      A=0.
      B=13485.112
C
C  OTAN TO A .NE. 0
      IF(A.EQ.0.) GO TO 11
      X=-B/A
      WRITE(6,100) A,B,X
  100 FORMAT(1H ,5X,2HA=,E15.7,3H,B=,E15.7,3H,X=,E15.7)
      GO TO 33
C
C  OTAN A=0 KAI B .NE. 0
   11 IF(B.EQ.0.) GO TO 22
      WRITE(6,200) B
  200 FORMAT(1H ,5X,7HA=0, B=,E15.7,24H,H EXISOSH DEN EXEI LYSH)
      GO TO 33
C
C  OTAN A=B=0
   22 WRITE(6,300)
  300 FORMAT(1H ,5X,25HA=B=0, KATHE X EINAI LYSH   )
   33 STOP
      END
```

(σχ.2)

<u>'Αποτελέσματα :</u>

```
A=0, B=  0.1348511E 05,H EXISOSH DEN EXEI LYSH
```

α) 'Η ἐντολή FORMAT μπορεῖ νά τοποθετηθῆ ὁπουδήποτε πάντως πρίν τό END τό ὁποῖο εἶναι πάντα ἡ τελευταία ἐντολή τοῦ προγράμματος.

β) Τό FORMAT περιέχει ἐντός τῶν παρενθέσεων ὁδηγίες-κώδικες (=format codes) . Οἱ ὁδηγίες αὐτές χωρίζονται μεταξύ τους μέ κόμματα.

γ) 'Ο H - κώδικας ἔχει τήν γενική μορφή :

wH

πού σημαίνει : τύπωσε τούς w τυπογραφικούς χαρακτῆρες πού ἀκολουθοῦν μετά τό H ἀκριβῶς ὅπως ἔχουν π.χ.

1Hb, : (w=1) τύπωσε ἕνα κενό διάστημα,

2HA=, : (w=2) τύπωσε <u>A=</u>

24HbHbEXISOSHbDENbEXEIbLYSH, : (w=24) τύπωσε bHbEXISOSHbDENbEXEIbLYSH

(τό b παριστᾶ ἕνα κενό τυπογραφικό διάστημα).

δ) Ὅπως φαίνεται καί ἀπ' τά ἀποτελέσματα, χρησιμοποιοῦμε τόν H-κώδικα γιά νά γράψωμε σχόλια πού συνοδεύουν τά ἀποτελέσματα καί διευκολύνουν τό διάβασμά τους.

ε) Ὁ E-κώδικας ἔχει τήν γενική μορφή

aEw.d

καί σημαίνει: γράψε a πραγματικούς ἀριθμούς

πού καταλαμβάνουν w τυπογραφικές θέσεις καθένας

καί ἔχουν d ψηφία μετά τήν ὑποδιαστολή.

Ἐάν a=1 τότε μποροῦμε νά παραλήψουμε τό a .

π.χ. E15.6 εἶναι ὁ κώδικας πού χρησιμοποιήσαμε μέχρι τώρα.

ζ) Πρέπει πάντα νά ἰσχύη $d+7\leq w$. Τοῦτο διότι πλήν τῶν d ψηφίων μετά τήν ὑποδιαστολή ἀπαιτοῦνται κατά τήν γραφή μέ τόν E-κώδικα καί 7 τυπογραφικές θέσεις ἐπί πλέον γιά τούς ἑξεῖς χαρακτῆρες :

τό πρόσημο τοῦ ἀριθμοῦ	1 χαρακτήρας
τό 0 πρίν τήν ὑποδιαστολή	1 " "
τήν ὑποδιαστολή	1 " "
τό γρᾶμμα E	1 " "
τό πρόσημο τοῦ ἐκθέτη	1 " "
δύο ψηφία τοῦ ἐκθέτη	2 " "

π.χ. ἐάν γράψωμε τό 2.321972 μέ τό E17.8 τό ἀποτέλεσμα θά εἶναι

$$\underbrace{\mathrm{bb{+}0.}\underbrace{23219720}_{d=8}\mathrm{E{+}01}}_{w=17}$$

η) Ἐάν εἶναι d+7<w τότε οἱ w-(d+7) πρῶτες ἐξ ἀριστερῶν θέσεις ἐκ τῶν w παραμένουν κενές (στό προηγούμενο παράδειγμα συμβολίζονται μέ τό b).

Συνήθως γράφομε μέ κώδικες γιά τούς ὁποίους d+7<w, ἔτσι ὥστε τά ἀποτελέσματα νά μήν βγαίνουν κολλημένα τό ἕνα πάνω στό ἄλλο, παρά νά μεσολαβοῦν w-(d+7) κενοί χαρακτῆρες ἀνάμεσα σέ δύο διαδοχικούς ἀριθμούς (δές στό (*) στό ἑπόμενο πρόγραμμα).

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα τυπώνει τόν ἀριθμό -2.321972 μέ διαφορετικούς E-κώδικες.

Πρόγραμμα :

```
C  P6.2   O E-KODIKAS TOY FORMAT
C
C
      A=-2.321972
      WRITE(6,100) A
  100 FORMAT(1H ,10X,E14.7)
      WRITE(6,200) A
  200 FORMAT(1H ,10X,E16.7)
      WRITE(6,300) A
  300 FORMAT(1H ,10X,E14.4)
      WRITE(6,400) A
  400 FORMAT(1H ,10X,E11.4)
      WRITE(6,500) A
  500 FORMAT(1H ,10X,E20.10)
      WRITE(6,600) A,A
  600 FORMAT(1H ,10X,2E14.7)
      WRITE(6,700) A,A
  700 FORMAT(1H ,10X,2E16.7)
      STOP
      END
```

(σχ.3)

'Αποτελέσματα :

```
 -0.2321972E 01
   -0.2321972E 01
    -0.2322E 01
 -0.2322E 01
    -0.2321971000E 01
 -0.2321972E 01-0.2321972E 01       } (*)
   -0.2321972E 01  -0.2321972E 01   }
```

(σχ.4)

θ) 'Ο X-κώδικας ἔχει τήν γενική μορφή

wX

καί σημαίνει: προχώρησε κατά w-τυπογραφικά διαστήματα πρός τά δεξιά (δές π.χ. τό 10X στό P1.1). Τοῦτος ὁ κώδικας χρησιμοποεῖται γιά νά ἀφήνουμε κενά διαστήματα μεταξύ δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν πού τυπώνουμε.

ι) Μέ τόν I-κώδικα τυπώνουμε ἀκέραιους, ἡ γενική μορφή του

aIw

σημαίνει : τύπωσε a τό πλῆθος ἀκέραιους πού καταλαμβάνουν w τυπογραφικές θέσεις ὁ καθένας (δές P4.1,P4.2).

κ) 'Εάν ὁ ἀκέραιος ἔχει d ψηφία καί d<w τότε οἱ w-d πρῶτες ἐξ ἀριστερῶν τυπογραφικές θέσεις παραμένουν κενές. Συνήθως τυπώνουμε μέ κώδικες γιά τούς ὁποίους d<w , ἔτσι ὥστε νά δημιουργοῦνται κενά διαστήματα μεταξύ δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν (δές P4.1, P4.2).

λ) Μέ κάθε ἐντολή WRITE πού περιέχεται σ' ἕνα πρόγραμμα ἀρχίζει ἡ ἐκτύπωση μιᾶς νέας γραμμῆς ὑπό τήν καθοδήγηση τοῦ ἀντιστοίχου FORMAT .

μ) Τόν πρῶτο χαρακτήρα τόν ὁποῖο ὀφείλει νά τυπώση ὁ ἐκτυπωτής, κατά τήν ἐκτύπωση μιᾶς νέας γραμμῆς, δέν τόν τυπώνει ἀλλά τόν χρησιμοποιεῖ σάν κώδικα γιά ν' ἀλλάξη γραμμή ἤ νά ἀφήση μιά κενή ἐνδιάμεση γραμμή ἤ νά ἀλλάξη σελίδα κ.ο.κ. Συγκεκριμένα ἄν ὁ πρῶτος χαρακτήρας εἶναι :

b (κενό διάστημα) τότε ἀρχίζει νά τυπώνη στήν ἐπομένη γραμμή.

0 τότε ἀφήνει μιά ἐνδιάμεση γραμμή κενή.

\+ τότε γράφει στήν γραμμή πού ἤδη εὑρίσκεται.

1 τότε προχωρεῖ στήν πρώτη γραμμή τῆς ἐπομένης σελίδας.

Σέ ὅλα τά προγράμματα μέχρι τώρα τό πρῶτο στοιχεῖο ἦταν πάντα ἕνας κενός χαρακτήρας (δές τά FORMAT τῶν προηγουμένων προγραμμάτων).

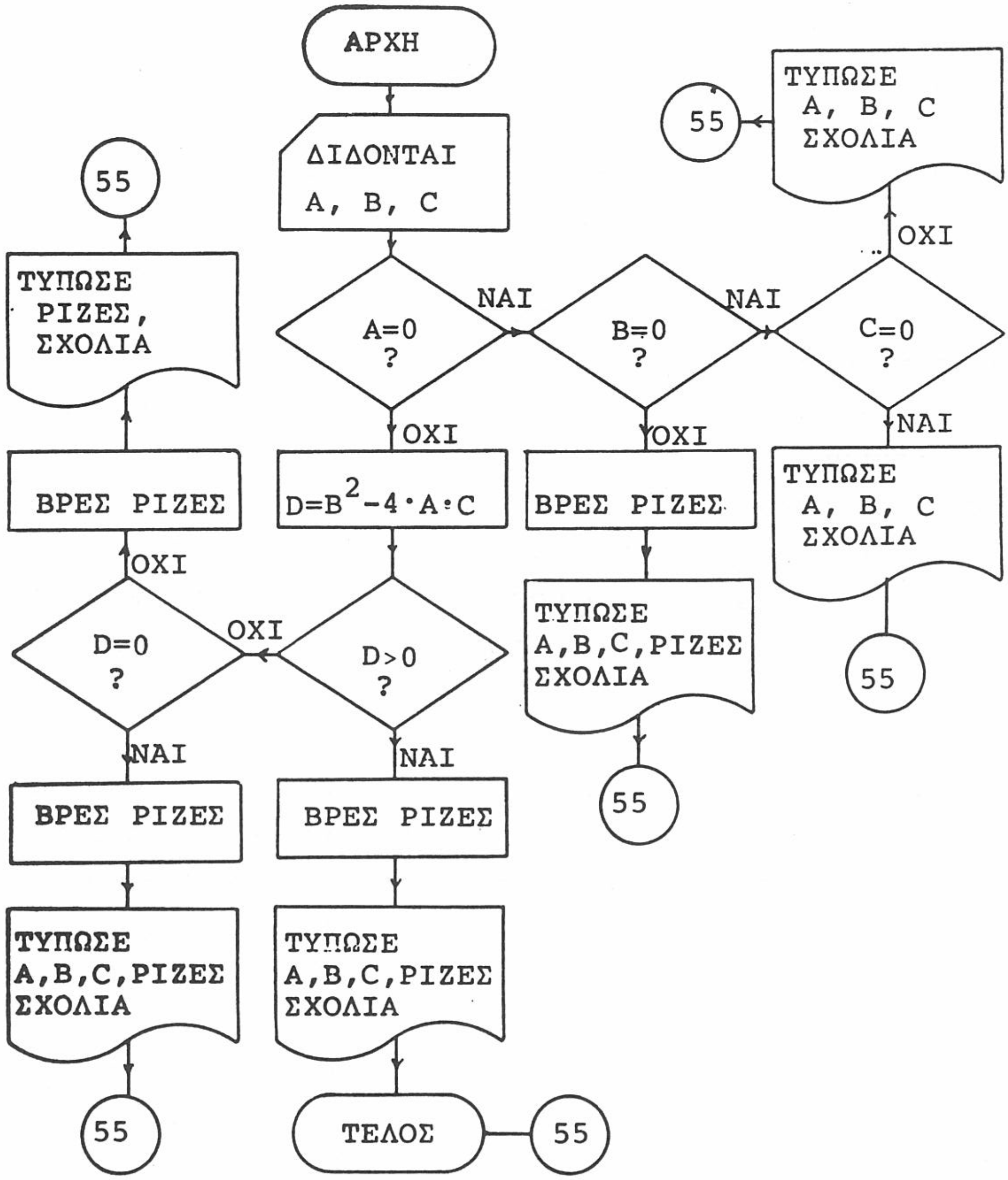
ν) Ὁ κώδικας nPaEw.d εἶναι κατ' οὐσίαν μιά τροποποίηση τοῦ aEw.d (δές ε) κατά τήν ὁποία μετατίθεται ἡ ὑποδιαστολή τοῦ ἀριθμοῦ πρός τά δεξιά κατά n ψηφία ἐνῶ ταυτόχρονα μειώνεται ὁ ἐκθέτης τοῦ ἀριθμοῦ κατά n. Τοῦτο ἀντιστοιχεῖ μέ ἕνα πολλαπλασιασμό τοῦ ἀριθμοῦ μέ τό 10^n. Ἔτσι π.χ. ὁ ἀριθμός

0.1234567E 00 γράφεται μέσω τοῦ κώδικα 1P1E14.7 :
1.2345670E-01
" " " " " " " " 2P1E14.7 :
12.345670E-02
" " " " " " " " 4P1E14.7 :
1234.5670E-04

ξ) Τό πλῆθος τῶν μετά τήν ὑποδιαστολή ψηφίων ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ τυπωμένου μέ τό nPaEw.d ἰσοῦται μέ d-(n-1).

ο) Ἐάν a=1 τότε τό 1 μπορεῖ νά παραληφθῆ π.χ. μποροῦμε ἀντί 2P1E15.7 νά γράψωμε 2PE15.7. Πολύ συχνά χρησιμοποιεῖται ὁ κώδικας 1P1Ew.d ἤ 1PEw.d (δές τά FORMAT τοῦ P6.3).

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα εὑρίσκει γιά δοθέντα a, b, c τίς ρίζες τῆς ἐξισώσεως $ax^2+bx+c=0$.



ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΟΣ ΕΞΙΣΩΣΗ

(σχ.5)

<u>Πρόγραμμα :</u>

```
C   P6.3    LYSH DEYTEROBATHMIOY EXISOSEOS
C
      A=1.0000001
      B=3.0000003
      C=6.0000006
      IF(A.EQ.0) GO TO 1
C
C   H DIAKRINOYSA THS EXISOSEOS = D
      D=B**2-4.*A*C
      IF(D.GT.0.) GO TO 4
      IF(D.EQ.0.) GO TO 5
```

(σχ.6)

```
C
C  OTAN  D .LT.0, DYO MIGADIKES RIZES
C  X1R, X1I : PRAGMATIKO KAI FANTASTIKO MEROS
C             THS  1-HS LYSEOS
C  X2R, X2I : PRAGMATIKO KAI FANTASTIKO MEROS
C             THS  2-HS LYSEOS
      D=(-D)**0.5
      X1R=-B/2./A
      X2R=X1R
      X1I=D/2./A
      X2I=-X1I
      WRITE(6,100) A,B,C,X1R,X1I,X2R,X2I
  100 FORMAT(1H0,5X,2HA=,1P1E15.7,3H,B=,1P1E15.7,3H,C=,
     1 1P1E15.7//5X,10H(X1R,X1I)=,1P2E15.7/5X,10H(X2R,X2I)=,
     2 1P2E15.7//5X,35HH EXISOSH EXEI DYO MIGADIKES LYSEIS)
      GO TO 55
    1 IF(B.EQ.0.) GO TO 2
C
C  OTAN A=0, B .NE. 0
      X1R=-C/B
      WRITE(6,200) A,B,C,X1R
  200 FORMAT(1H0,5X,2HA=,1P1E15.7,3H,B=,1P1E15.7,3H,C=,
     1 1P1E15.7//5X,4HX1R=,1PE15.7//26H  H EXISOSH EXEI 1 LYSH)
      GO TO 55
    2 IF(C.EQ.0.) GO TO 3
C
C  OTAN A=B=0, C .NE. 0
      WRITE(6,300) A,B,C
  300 FORMAT(9H0        A=,1P1E15.7,3H,B=,1P1E15.7,3H,C=,1P1E15.7
     1 //30H      H EXISOSH DEN EXEI LYSEIS)
      GO TO 55
C
C  OTAN A=0, B=0, C=0
    3 WRITE(6,400) A,B,C
  400 FORMAT(9H0        A=,1P1E15.7,3H,B=,1P1E15.7,3H,C=,1P1E15.7
     1 //37H      KATHE X EINAI LYSH THS EXISOSEOS)
      GO TO 55
C
C  OTAN D .GT. 0, PRAGMATIKES RIZES
    4 X1R=-B/2./A-D**0.5/2./A
      X2R=-B/2./A+D**0.5/2./A
      WRITE(6,500) A,B,C,X1R,X2R
  500 FORMAT(9H0        A=,1P1E15.7,3H,B=,1P1E15.7,3H,C=,1P1E15.7
     1 //6X,4HX1R=,1P1E15.7/6X,4HX2R=,1P1E15.7//
     2 6X,37HH EXISOSH EXEI DYO PRAGMATIKES LYSEIS)
      GO TO 55
C
C  OTAN D=0, MIA DIPLH RIZA
    5 X1R=-B/2./A
      WRITE(6,600) A,B,C,X1R
  600 FORMAT(1H0,5X,2HA=,1P1E15.7,3H,B=,1P1E15.7,3H,C=,1P1E15.7
     1 //6X,4HX1R=,1P1E15.7/29HH EXISOSH EXEI MIA DIPLH RIZA)
   55 STOP
      END
```

(σχ.6 συνέχεια)

'Αποτελέσματα :

```
 A=  1.0000000E 00,B=  3.0000000E 00,C=  6.0000000E 00

(X1R,X1I)= -1.5000000E 00  1.9364910E 00
(X2R,X2I)= -1.5000000E 00 -1.9364910E 00

H EXISOSH EXEI DYO MIGADIKES LYSEIS
```

(σχ.7)

π) Τό σύμβολο / έντός τοῦ FORMAT προξενεῖ άλλαγή τῆς γραμμῆς, ἡ ἐκτύπωση συνεχίζεται ἀπ' τήν ἀρχή τῆς ἐπομένης γραμμῆς. $\underbrace{///...//}_{\nu\ \text{φορές}}$ προξενεῖ πάλι ἀλλαγή γραμμῆς, ἡ ἐκτύπωση συνεχίζεται ἀπ' τήν ἀρχή τῆς ν-στῆς ἐπομένης γραμμῆς, μεσολαβοῦν συνεπῶς ν-1 ἐνδιάμεσες κενές γραμμές.

ρ) Κατά τήν ἐκτύπωση μιᾶς νέας γραμμῆς μετά ἀπό ἕνα / ἰσχύει γιά τόν πρῶτο χαρακτήρα πού ὀφείλει νά τυπωθῆ πάλι ὁ κανόνας μ).

σ) Ένας οἱοσδήποτε χαρακτήρας πλήν τοῦ 0 καί τοῦ κενοῦ τυπωμένος στήν 6η στήλη μιᾶς κάρτας καθορίζει ὅτι ἡ παρούσα κάρτα ἀποτελεῖ συνέχεια τῆς προηγουμένης (continuation card) καί ὄχι αὐτοτελή ἐντολή. Τέτοιες κάρτες χρησιμοποιοῦμε ὅταν ἡ ἐντολή δέν χωρᾶ σέ μιά μόνο κάρτα (δές τά FORMAT τοῦ P6.3). Ἡ FORTRAN ἐπιτρέπει τό πολύ 19 διαδοχικές κάρτες-συνέχειες.

Ἀσκήσεις

P6.4 Ὑπολόγισε μέ τό P6.1 τήν λύση τῆς ax+b=0, ὅταν

1ον) a=0, b=0

2ον) a=0, b=1

3ον) a=1, b=-2

Γιά κάθε περίπτωση ἐξέτασε τό τυπωμένο σχόλιο πού συνοδεύει τά ἀποτελέσματα καί τό ἀντίστοιχο FORMAT μέ τό ὁποῖο ἐκτυπώνεται.

P6.5 Ὑπολόγισε μέ τό P6.3 τίς λύσεις τῆς $ax^2+bx+c=0$

ὅπου 1ον) a=0, b=0, c=0,
2ον) a=0, b=0, c=1,
3ον) a=0, b=1, c=1,
4ον) a=1, b=2, c=2,
5ον) a=1, b=3, c=1
6ον) a=1, b=-2, c=1.

Ἐξέτασε γιά κάθε περίπτωση ὅπως καί στό P6.4 τά τυπωμένα σχόλια καί τά ἀντίστοιχα FORMAT.

P6.6 Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο παράγει 20 λευκές σελίδες.

P6.7 Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο παράγει γραμμωτό χαρτί μέ συνολικά 2000 γραμμές τῶν 120 τυπογραφικῶν θέσεων ἡ κάθε μιά. Ἀνάμεσα σέ δύο διαδοχικές γραμμές θέλομε νά μεσολαβῆ μιά κενή.

P6.8 Τροποποίησε τό P6.7 ἔτσι ὥστε κάθε 10η τυπωμένη γραμμή νά περιέχη τόν ἀριθμό 1 στήν 1η θέση
" " " 6 στήν 6η θεση
" " " 73 στήν 73η καί 74η θέση.

P6.9 Ἡ ἀντίστροφος μιᾶς μήτρας πραγματικῶν ἀριθμῶν $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ ὑπάρχει τότε καί μόνον, ὅταν ἡ ὁρίζουσα $\Delta=\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0$. Γιά $\Delta\neq 0$ δίδεται ἡ ἀντίστροφος $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}$ μέσω τῶν τύπων

$$\alpha_1=\delta/\Delta \qquad \beta_1=-\beta/\Delta$$
$$\gamma_1=-\gamma/\Delta \qquad \delta_1=\alpha/\Delta$$

Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο γιά δοθέντα α, β, γ, δ ὑπολογίζει τήν ὁρίζουσα Δ, τήν ἀντίστροφο ἐφ' ὅσον $\Delta\neq 0$ καί τυπώνει τά ἀποτελέσματα μέ σχετικό σχόλιο.

P6.10 Τύπωσε τούς 100 πρώτους ἀριθμούς 1,2,...,100 σέ 10 σειρές ἀπό 10 σέ κάθε σειρά.

P6.11 Τύπωσε τά 100 πρῶτα πολλαπλάσια τοῦ 23 ἀπό 10 σέ κάθε γραμμή.

P6.12 Κατασκεύασε πρόγραμμα τό όποῖο εὑρίσκει καί τυπώνει ὅλα τά ζεύγη (N1,N2) ἀκεραίων ἀριθμῶν πού πληροῦν τίς συνθῆκες :

1ον) $0 < N1 < N2 \leq 51$

2ον) N1 καί N2 δέν ἔχουν κοινό διαιρέτη

3ον) N1 καί N2 εἶναι περιτοί .

Τό πρόγραμμα θέλουμε νά τυπώνη σέ μιά γραμμή μαζύ μέ κάθε ζεῦγος N1,N2 πού εὑρίσκει καί τούς ἀκέραιους

A = N1*N2

B = (N2**2-N1**2)/2

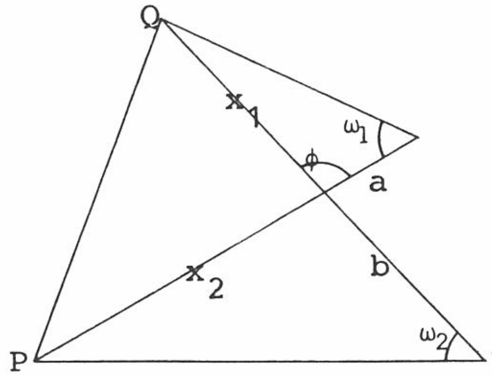
C = (N1**2+N2**2)/2

Σημείωσε ὅτι τά A, B, C εἶναι "πυθαγόρειοι ἀριθμοί", δηλαδή πληροῦν τήν σχέση $A^2 + B^2 = C^2$.

7

Οἱ συναρτήσεις τῆς FORTRAN

Ὁρισμένες συναρτήσεις πού χρησιμοποιοῦνται συχνά σέ ἀριθμητικούς ὑπολογισμούς ἔχουν στήν FORTRAN εἰδικά ὀνόματα καί μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν σέ ὁποιοδήποτε σημεῖο ἑνός προγράμματος.



(σχ.1)

Στό σχῆμα 1 τό μῆκος τῆς PQ μπορεῖ νά ὑπολογισθῆ βάσει τῶν στοιχείων φ, ω_1, ω_2, a καί b μέσω τοῦ τύπου

$$PQ^2 = x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\cos(\pi-\varphi)$$

ὅπου $x_1=a\sin(\omega_1)/\sin(\pi-\varphi-\omega_1)$

$x_2=b\sin(\omega_2)/\sin(\pi-\varphi-\omega_2)$

Στό ἑπόμενο πρόγραμμα δίδονται τά $\varphi,\omega_1,\omega_2,a,b$ καί ὑπολογίζεται τό μῆκος PQ .

Πρόγραμμα :

```
C   P7.1    TRIGONOMETRIKOS PROSDICRISMOS APOSTASEOS
C           DYO SHMEION
C
      PI=3.141592
      FI=3.1
      OMEGA1=0.03
      OMEGA2=0.02
      A=50.28
      B=75.32
C
C   YPOLOGISE TA X1, X2, PQ
      X1=A*SIN(OMEGA1)/SIN(PI-FI-OMEGA1)
      X2=B*SIN(OMEGA2)/SIN(PI-FI-OMEGA2)
      PQ=X1*X1+X2*X2-2.*X1*X2*COS(PI-FI)
```

(σχ.2)

```
      PQ=SQRT(PQ)
C   TYPOSE TO APOTELESMA
      WRITE(6,100) PQ
  100 FORMAT(1H ,5X,3HPQ=,1PE14.7,6H METRA)
      STOP
      END
```

(σχ.2 συνέχεια)

<u>'Αποτελέσματα ;</u>

```
PQ= 6.0473099E+01 METRA
```

α) SIN(X), ἀντ. COS(X) παριστᾶ στήν FORTRAN τήν συνάρτηση sin(x) ἀντ. cos(x) (ἠμ(x), ἡμίτονο x, ἀντ. συν(x), συνημίτονο x). 'Εντός τῶν παρενθέσεων μπορεῖ νά γραφῆ μιά οἱαδήποτε ἀλγεβρική παράσταση. Τοῦτο ἰσχύει γιά ὅλες τίς συναρτήσεις τῆς FORTRAN . 'Ο ἑπόμενος πίνακας περιέχει ὁρισμένες συναρτήσεις τίς ὁποῖες θά χρησιμοποιήσουμε συχνά στό ἑξῆς, ὁ πλήρης πίνακας τῶν συναρτήσεων τῆς FORTRAN δίδεται στό παράρτημα (πίνακας 1).

Ὄνομα τῆς συναρτήσεως	'Ορισμός συναρτ.	Ὄνομα FORTRAN	Τύπος τῆς 'Ανεξ. μεταβ.	Τύπος τῆς 'Εξηρ. μετ.
ἡμίτονο	$y=\sin(x)$	SIN(X)	REAL	REAL
συνημίτονο	$y=\cos(x)$	COS(X)	REAL	REAL
ἐφαπτομένη	$y=\tan(x)$	TAN(X)	REAL	REAL
φυσικός λογάριθμος	$y=\ln(x)$	ALOG(X)	REAL	REAL
δεκαδικός λογάριθμος	$y=\log(x)$	ALOG10(X)	REAL	REAL
τετραγωνική ρίζα.	$y=\sqrt{x}$	SQRT(X)	REAL	REAL
ἐκθετική	$y=\exp(x)$	EXP(X)	REAL	REAL
ἀπόλυτος τιμή	$y=\|x\|$	ABS(X)	REAL	REAL
μετατροπή REAL σέ INTEGER	...	INT(X)	REAL	INTEGER
μετατροπή INTEGER σέ REAL	...	FLOAT(N)	INTEGER	REAL

(σχ. 3)

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα ὑπολογίζει καί τυπώνει τούς πρώτους 100 ὅρους τῶν ἑξῆς σειρῶν :

$$a_n=1+1/2+1/3+...+1/n \quad (\text{ὅριο}=\infty)$$

$$b_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2} \quad (\text{ὅριο}=\pi^2/6)$$

$$c_n=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3} \qquad (\text{όριο}=1.2020569031\ldots)$$

$$d_n=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{n^4} \qquad (\text{όριο}=\pi^4/90)$$

Πρόγραμμα :

```
C   P7.2    PINAKAS TIMON SEIRON
C
C   ARXIKES TIMES
        I=0
        AN=0.
        BN=0.
        CN=0.
        DN=0.
C
C   YPOLOGISMOS TON PROSTHETAION THS SEIRAS
    11  I=I+1
        PROSA=1./FLOAT(I)
        PROSB=PROSA*PROSA                 (II)
        PROSC=PROSB*PROSA
        PROSD=PROSC*PROSA
C                                                  (I)
C   YPOLOGISMOS TON AN, BN, CN, DN
        AN=AN+PROSA
        BN=BN+PROSB
        CN=CN+PROSC
        DN=DN+PROSD
C
C   TYPOSE TA AN, BN, CN, DN
C   EAN I=100 STAMATA, ALLOS PHGAINE STO 11
        WRITE(6,100) I, AN, BN, CN, DN
  100   FORMAT(1H ,5X,I5,1P4E16.7)
        IF(I.EQ.100) STOP
        GO TO 11
        END
```

(σχ.3)

Αποτελέσματα :

1	1.0000000E 00	1.0000000E 00	1.0000000E 00	1.0000000E 00
2	1.5000000E 00	1.2500000E 00	1.1250000E 00	1.0625000E 00
3	1.8333330E 00	1.3611100E 00	1.1620360E 00	1.0748450E 00
4	2.0833330E 00	1.4236100E 00	1.1776610E 00	1.0787510E 00
5	2.2833320E 00	1.4636100E 00	1.1856610E 00	1.0803500E 00
6	2.4499980E 00	1.4913880E 00	1.1902900E 00	1.0811220E 00
7	2.5928550E 00	1.5117950E 00	1.1932050E 00	1.0815380E 00
8	2.7178550E 00	1.5274200E 00	1.1951580E 00	1.0817820E 00
9	2.8289660E 00	1.5397660E 00	1.1965300E 00	1.0819330E 00
10	2.9289650E 00	1.5497650E 00	1.1975290E 00	1.0820330E 00
11	3.0198740E 00	1.5580290E 00	1.1982800E 00	1.0821000E 00
12	3.1032070E 00	1.5649720E 00	1.1988580E 00	1.0821480E 00
13	3.1801300E 00	1.5708890E 00	1.1993130E 00	1.0821820E 00
14	3.2515580E 00	1.5759900E 00	1.1996770E 00	1.0822080E 00
15	3.3182240E 00	1.5804340E 00	1.1999730E 00	1.0822270E 00
16	3.3807240E 00	1.5843410E 00	1.2002170E 00	1.0822420E 00

(σχ.4)

17	3.4395470E 00	1.5878000E 00	1.2004200E 00	1.0822540E 00
18	3.4951020E 00	1.5908870E 00	1.2005910E 00	1.0822620E 00
19	3.5477340E 00	1.5936560E 00	1.2007360E 00	1.0822700E 00
20	3.5977330E 00	1.5961560E 00	1.2008600E 00	1.0822760E 00
21	3.6453520E 00	1.5984230E 00	1.2009680E 00	1.0822810E 00
22	3.6908060E 00	1.6004880E 00	1.2010620E 00	1.0822840E 00
23	3.7342840E 00	1.6023780E 00	1.2011440E 00	1.0822870E 00
24	3.7759500E 00	1.6041140E 00	1.2012150E 00	1.0822900E 00
25	3.8159500E 00	1.6057130E 00	1.2012790E 00	1.0822920E 00
26	3.8544110E 00	1.6071920E 00	1.2013350E 00	1.0822940E 00
27	3.8914480E 00	1.6085640E 00	1.2013860E 00	1.0822950E 00
28	3.9271620E 00	1.6098390E 00	1.2014310E 00	1.0822960E 00
29	3.9616440E 00	1.6110270E 00	1.2014710E 00	1.0822970E 00
30	3.9949760E 00	1.6121380E 00	1.2015070E 00	1.0822980E 00
31	4.0272350E 00	1.6131790E 00	1.2015400E 00	1.0822990E 00
32	4.0584850E 00	1.6141550E 00	1.2015710E 00	1.0823000E 00
33	4.0887880E 00	1.6150730E 00	1.2015990E 00	1.0823000E 00
	...		...	...
95	5.1363110E 00	1.6344210E 00	1.2019610E 00	1.0823000E 00
96	5.1467270E 00	1.6345290E 00	1.2019620E 00	1.0823000E 00
97	5.1570360E 00	1.6346340E 00	1.2019630E 00	1.0823000E 00
98	5.1672400E 00	1.6347380E 00	1.2019640E 00	1.0823000E 00
99	5.1773400E 00	1.6348400E 00	1.2019650E 00	1.0823000E 00
100	5.1873390E 00	1.6349390E 00	1.2019660E 00	1.0823000E 00

(σχ.4 συνέχεια)

β) Ἡ συνάρτηση FLOAT(I) μετατρέπει τόν ἀκέραιο I π.χ.53 σέ πραγματικό (53.00) .

γ) Ἡ FORTRAN ἐπιτρέπει σύνθεση συναρτήσεων, ἔτσι λ.χ. ἡ

$$y=\left|\ln\left(\sqrt{\sin^2(x)+0.2}+\sqrt{\sin^2(x)+0.1}\right)\right|$$

ἀντιστοιχεῖ στήν ἐντολή τῆς FORTRAN

```
Y=ABS(ALOG(SQRT(SIN(X)**2+0.2)+SQRT(SIN(X)**2+0.1)))
```

Ἀσκήσεις

P7.3 Τροποποιῶντας τό P7.1 κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο (δές σχ.1) βάσει τῶν δοθέντων φ, ω_1, ω_2, a, b,

1ον) εὑρίσκει τό μῆκος τοῦ PQ (ὅπως τό P7.1)

2ον) εὑρίσκει τό ἐμβαδόν E τοῦ τριγώνου PQW (τύπος τοῦ Ἥρωνα, P2.2).

3ον) εὑρίσκει τήν ἀπόσταση APO τοῦ σημείου B ἀπό τήν εὐθεία PQ, $APO=\frac{2E}{PQ}$.

P7.4 Ἐξήγησε τήν λειτουργία τῶν τμημάτων (II) καί (I) τοῦ προγράμματος P7.2 .

P7.5 Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο εὑρίσκει τίς τιμές τῆς συναρτήσεως

$$y=\ln\left(\frac{x^2+x+1}{|\sin(x)|}\right)$$

γιά τά x =1, 2, 3,...,10 .

P7.6 Γρᾶψε τίς ἐντολές τῆς FORTRAN πού ἀντιστοιχοῦν στούς ἑξῆς τύπους :

$y=\sin(\frac{1}{23}\tan(23))$, $y=(1+(1-\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$, $y=\frac{\tan(2x)}{\tan(x)}$,

$y=\frac{x}{2x+\exp(\frac{1}{x-1})}$, $y=\exp(-2t)(1+\frac{1}{t+1})$, $y=\ln(|\ln(|x|)|)$

$y=a^{\ln(x)}$, $y=t\ln(t)-3t^2$, $y=\ln(\frac{a+\cot an(x)}{a-2\cot an(x)})$.

P7.7 Ἡ συνάρτηση τῆς FORTRAN Y=AMAX1(A,B) δίδει στό Y τήν τιμή τοῦ μεγίστου ἐκ τῶν α, β. Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο 1ον) ὑπολογίζει καί τυπώνει τούς ἀριθμούς tan(1), tan(2),..., tan(100)

2ον) ὑπολογίζει μέ τήν βοήθεια τῆς AMAX1 τό μέγιστο τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.

P7.8 Τροποποίησε τό P7.7 ἔτσι ὥστε νά μήν χρησιμοποιῆ τήν AMAX1 .

P7.9 Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο

1ον) ὑπολογίζει δύο ἀριθμούς $a=\tan(2^{31}-1)$, $b=\tan(2^{16})$

2ον) ἐάν $a\geq b$ τυπώνει τά a,b ὅπως ἔχουν, ἄλλως ἐναλλάσει τίς τιμές τους καί τά τυπώνει.

8

Μεταβλητές μέ δεῖκτες (=arrays)

Ἡ ἐντολή DIMENSION

Πολλές φορές σέ μαθηματικούς ὑπολογισμούς εἶναι ἀπαραίτητο νά χρησιμοποιήσωμε· μεταβλητές μέ δεῖκτες π.χ.

$a_1,\ a_2, \ldots, a_n$: μεταβλητές μέ ἕνα δείκτη (διάνυσμα)

$$\begin{matrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \ldots & b_{1,k} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \ldots & b_{2,k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{i,1} & b_{i,2} & b_{i,3} & \ldots & b_{i,k} \end{matrix}$$

: μεταβλητές μέ δύο δεῖκτες (μήτρα)

Τό ἐπόμενο πρόγραμμα δίδει ἕνα παράδειγμα χρήσεως μεταβλητῶν μέ δεῖκτες στήν FORTRAN . Δοθέντος τοῦ x τό πρόγραμμα ὑπολογίζει καί τυπώνει τά $a_1=x,\ a_2=x^2,\ \ldots, a_9=x^9$.

Πρόγραμμα :

```
C  P8.1    METABLHTES ME ENA DEIKTH (DIANYSMA)
C
      DIMENSION A(9)
      X=0.9351711
      I=0
   11 I=I+1
      A(I)=X**I
      IF(I.LT.9) GO TO 11
      WRITE(6,100) A
  100 FORMAT(4E15.7)
      STOP
      END
```

(σχ.1)

<u>'Αποτελέσματα :</u>

```
0.9351711E 00  0.8745449E 00  0.8178491E 00  0.7648288E 00
0.7152458E 00  0.6688771E 00  0.6255146E 00  0.5849631E 00
0.5470406E 00
```

(σχ. 2)

α) 'Η ἐντολή DIMENSION A(9) ὑποδεικνύει στόν ὑπολογιστή ὅτι τό A δέν παριστᾶ μιά ἁπλή μεταβλητή ἀλλά ἕνα σύνολο ἀπό ἐννέα μεταβλητές A(1),A(2),...,A(9) (τό A λέμε ὅτι εἶναι διάνυσμα 9 διαστάσεων, DIMENSION=διάσταση).

β) 'Η ἐντολή WRITE(6,100) A εἶναι ἰσοδύναμος μέ τήν
WRITE(6,100) A(1),A(2),A(3),...κ.τ.λ.

γ) A εἶναι τό ὄνομα ὁλοκλήρου τοῦ διανύσματος, τοῦτο ἀκολουθεῖ τούς κανόνες 1.δ , 1.ε .

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα χρησιμοποιεῖ τρία διανύσματα A(13), B(13), C(13) στά ὁποῖα δίδονται οἱ ἑξῆς τιμές

$A(1)=1 \qquad B(1)=1 \qquad C(1)=1$

$A(2)=1/1 \qquad B(2)=1/1! \qquad C(2)=1+\frac{1}{1!}$

$A(3)=1/2 \qquad B(3)=1/2! \qquad C(3)=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}$ κ.ο.κ.

Τά A, B, C τυπώνονται σέ μιά στήλη τό καθένα.

<u>Πρόγραμμα :</u>

```
C   P8.2    YPOLOGISMOS TOY  E=1+1/1+1/(1*2)+...
C
       DIMENSION A(13), B(13), C(13)
       A(1)=1.
       B(1)=1.
       C(1)=1.
       I=1
    11 I=I+1
       A(I)=1./FLOAT(I-1)
       B(I)=B(I-1)*A(I)                    (*)
       C(I)=C(I-1)+B(I)
       IF(I.LT.13) GO TO 11
C
C   TYPOSE TA A, B, C
       I=0
    22 I=I+1
       J=I-1
       WRITE(6,250) J,A(I),B(I),C(I)          (**)
   250 FORMAT(1H0,5X,I5,3E15.7)
       IF(I.LT.13) GO TO 22
       STOP
       END
```

(σχ. 3)

'Αποτελέσματα :

0	0.1000000E 01	0.1000000E 01	0.1000000E 01
1	0.1000000E 01	0.1000000E 01	0.2000000E 01
2	0.5000000E 00	0.5000000E 00	0.2500000E 01
3	0.3333333E 00	0.1666666E 00	0.2666666E 01
4	0.2500000E 00	0.4166666E-01	0.2708332E 01
5	0.2000000E 00	0.8333329E-02	0.2716665E 01
6	0.1666666E 00	0.1388888E-02	0.2718054E 01
7	0.1428571E 00	0.1984125E-03	0.2718252E 01
8	0.1250000E 00	0.2480156E-04	0.2718277E 01
9	0.1111111E 00	0.2755728E-05	0.2718279E 01
10	0.9999996E-01	0.2755727E-06	0.2718279E 01
11	0.9090906E-01	0.2505205E-07	0.2718279E 01
12	0.8333331E-01	0.2087670E-08	0.2718279E 01

(σχ. 4)

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα τυπώνει μιά μήτρα 5 ἐπί 2 διαστάσεων τῆς ὁποίας τά στοιχεῖα εἶναι A(I,J)= J .

Πρόγραμμα :

```
C  P8.3    EKTYPOSH MHTRAS
C
        INTEGER A
        DIMENSION A(5,2)
C
C   EFODIASMOS THS A ME TIMES
        I=0
    11  I=I+1
        J=0
    22  J=J+1
        A(I,J)=J
        IF(J.LT.2) GO TO 22
        IF(I.LT.5) GO TO 11
C
C   EKTYPOSH THS A
        WRITE(6,260) A
   260  FORMAT(1H0,5X,5I3)
        STOP
        END
```

(σχ. 5)

'Αποτελέσματα :

1 1 1 1 1

2 2 2 2 2

(σχ. 6)

δ) Ὁ ὑπολογιστής ἀπομνημονεύει ἐσωτερικά τό A σάν νά ἦταν διάνυσμα μέ τήν ἑξῆς σειρά
A(1,1),A(2,1),A(3,1),A(4,1),A(5,1),A(1,2),A(2,2),A(3,2),A(4,2)
Μέ τό WRITE(6,260) A τυπώνει τήν μήτρα μέ τήν παραπάνω σειρά, Σάν ἀποτέλεσμα στό σχ. 6 τυπώνεται ἡ ἀνάστροφος A^{τ} (ὅπως λέγεται) τῆς μήτρας A. Συνήθως τήν μήτρα A τήν γράφομε $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

ε) Ὁ δ) κανόνας ἰσχύει ἀναλόγως καί γιά μεταβλητές μέ 3 δεῖκτες. Ἐν γένει μιά μεταβλητή μέ δεῖκτες ἀπομνημονεύεται ἐσωτερικά σάν διάνυσμα εἰς τρόπον ὥστε ὁ πρῶτος δείκτης νά μεταβάλλεται γρηγορώτερα ἀπό τόν δεύτερο, ὁ δεύτερος γρηγορώτερα ἀπό τόν τρίτο κ.ο.κ. Ἔτσι λ.χ. ἡ B(2,2,2) ἀπομνημονεύεται σάν διάνυσμα κατά τήν ἑξῆς σειρά
B(1,1,1),B(2,1,1),B(1,2,1),B(2,2,1),B(1,1,2),B(2,1,2),
B(1,2,2),B(2,2,2)
Ἡ ANSI-FORTRAN δέν ἐπιτρέπει μεταβλητές μέ περισσότερους ἀπό 3 δεῖκτες (ὁ IBM-370 ἐπιτρέπει μέχρι 7 δεῖκτες).

Μιά ἀκολουθία a_1, a_2, a_3, ... ἀριθμῶν, $a_i \in (0,1)$ λέγεται "ἀκολουθία τυχαίων ἀριθμῶν" ὅταν οἱ ὅροι της εἶναι ὁμαλῶς κατανεμημένοι στό διάστημα (0,1), δηλαδή ἡ πιθανότης νά ἀνήκη ἕνας οἱοσδήποτε ἀριθμός τῆς ἀκολουθίας a_i στό διάστημα $(\alpha,\beta) \subset (0,1)$ εἶναι $= \beta-\alpha$.
Τό ἑπόμενο πρόγραμμα (γεννήτρια τυχαίων ἀριθμῶν) παράγει μιά ἀκολουθία τυχαίων ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς:
Δίδεται ἕνας περιττός φυσικός ἀριθμός X π.χ. X=3675 ὁ ὁποῖος παράγει μιά ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν μέσω τῶν ἐντολῶν

```
X=MOD(X*32581,2**15)
A(I)=X/FLOAT(2**15)
```

MOD(N1,N2) εἶναι ἡ συνάρτηση τῆς FORTRAN ἡ ὁποία γιά θετικούς ἀκεραίους N1, N2 δίδει τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ N1 διά τοῦ N2.

Πρόγραμμα :

```
C  P8.4   GENHTRIA TYXAION ARITHMON
C
        INTEGER X
        DIMENSION A(100)
        N=2**15
        XN=FLOAT(N)
        X=3675
C
C  KATASKEYH THS AKOLOYTHIAS
        I=0
     11 I=I+1                                  (*)
        X=MOD(X*32581,N)
        A(I)=FLOAT(X)/XN
        IF(I.LT.100) GO TO 11
C
C  EKTYPOSH
        WRITE(6,250) A
    250 FORMAT(4E15.7)
        STOP
        END
```

(σχ. 7)

Ἀποτελέσματα :

0.2755737E-01	0.8467712E 00	0.6537781E 00	0.7434998E 00
0.9655457E 00	0.4429626E 00	0.1659851E 00	0.9607849E 00
0.3332214E 00	0.6875916E 00	0.4203796E 00	0.3890076E 00
0.2555847E 00	0.2056580E 00	0.5419617E 00	0.6531677E 00
0.8576355E 00	0.6221619E 00	0.6557312E 00	0.3782654E 00
0.2643738E 00	0.5621033E 00	0.8866882E 00	0.1893005E 00
0.6007996E 00	0.6504822E 00	0.3598328E 00	0.7112732E 00
0.9919128E 00	0.5122986E 00	0.2001648E 00	0.5691833E 00
0.5627136E 00	0.7725525E 00	0.5326843E 00	0.3880310E 00
0.4382019E 00	0.5624390E-01	0.4823914E 00	0.7928162E 00
0.7433777E 00	0.9883728E 00	0.1742859E 00	0.4085388E 00
0.6032410E 00	0.1939392E 00	0.7333679E 00	0.8601990E 00
0.1427917E 00	0.2979431E 00	0.2846375E 00	0.7727966E 00
0.4870300E 00	0.9253845E 00	0.9530945E 00	0.7713318E 00
0.7609558E 00	0.7012634E 00	0.8637390E 00	0.4808044E 00
0.8956909E-01	0.2505798E 00	0.1415710E 00	0.5262146E 00
0.5978699E 00	0.1983337E 00	0.9115906E 00	0.5325623E 00
0.4108582E 00	0.1695251E 00	0.2987976E 00	0.1248474E 00
0.6535339E 00	0.7891541E 00	0.4281921E 00	0.9280701E 00
0.4508972E 00	0.6822205E 00	0.4247742E 00	0.5672302E 00
0.9279480E 00	0.4737244E 00	0.4135437E 00	0.6673279E 00
0.2096863E 00	0.7886658E 00	0.5195007E 00	0.8533630E 00
0.4211121E 00	0.2520447E 00	0.8676453E 00	0.7503357E 00
0.6872253E 00	0.4888611E 00	0.5829773E 00	0.9832458E 00
0.1330261E 00	0.1241150E 00	0.7904968E 00	0.1770935E 00

(σχ. 8)

'Ασκήσεις

P8.5 'Εξήγησε στό P8.1 τόν τρόπο μέ τόν όποῖο τυπώνονται τά ἀποτελέσματα μέσω τοῦ 100 FORMAT .

P8.6 'Εξήγησε τόν ρόλο τῶν τμημάτων (*) καί (**) τοῦ προγράμματος P8.2 .

P8.7 Τύπωσε τήν ἀνάστροφο τῆς μήτρας 10×10 διαστάσεων μέ στοιχεῖα $A(I,J) = \frac{1}{I+J}$ (μήτρα τοῦ Hilbert).

P8.8 'Εξήγησε τήν λειτουργία τοῦ τμήματος (*) τοῦ προγράμματος P8.4 καί τόν τρόπο μέ τόν ὁποῖο τυπώνονται τά ἀποτελέσματα.

P8.9 'Υπολόγισε τούς πρώτους 40 ἀριθμούς τοῦ Fibonacci μέ τήν βοήθεια τοῦ διανύσματος FIB(1), FIB(2),..., FIB(40) (δές τό P5.2).

P8.10 'Εάν A(I) εἶναι τυχαῖος ἀριθμός τότε

N6=INT(6.*A(I)+1.5)

παίρνει μιά ἀπ' τίς τιμές 1, 2, 3, 4, 5, 6 . Τό N6 μπορεῖ λοιπόν νά θεωρηθῆ σάν ἀποτέλεσμα μιᾶς τυχαίας ρίψης ζαριοῦ (ζαριά). Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο

1ον) "ρίχνει ἕνα ζάρι 100 φορές"

2ον) μετρᾶ πόσες φορές ἦρθε 1, τυπώνει τό ἀποτέλεσμα.

'Επανέλαβε τό πρόγραμμα γιά 1000, 10000 ρίψεις.

P8.11 Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο

1ον) "ρίχνει ἕνα νόμισμα 100 φορές"

2ον) Μετρᾶ πόσες φορές ἦρθε κορώνα καί τυπώνει τό ἀποτέλεσμα.

'Επανέλαβε τό πρόγραμμα γιά 1000, 10000 ρίψεις.

P8.12 Τύπωσε τόν πίνακα τῆς προπαίδειας μέ τήν βοήθεια μιᾶς 10×10 μήτρας .

P8.13 Πώς μπορούμε νά παραστήσωμε μιά ὁρισμένη τοποθέτηση γιά τά πούλια στό τάβλι ; Πώς μπορούμε νά παραστήσωμε μιά κίνηση μετά τήν ρίψη ἑνός ζαριοῦ ;

P8.14 Πῶς μπορούμε νά παραστήσωμε μιά ὁρισμένη τοποθέτηση γιά τά πιόνια στό σκάκι ; Πῶς μπορούμε νά παραστήσωμε μιά κίνηση ;

9

DO-κύκλος (=DO-loop)

Ἡ ἐντολή CONTINUE (=συνέχισε)

Κιβωτισμένοι DO-κύκλοι (=nested DO-loops)

Πεπλέγμενοι DO-κύκλοι (=implied DO-loops)

Ἐξετάζομε τόν τρόπο μέ τόν ὁποῖο ἐκτελοῦμε συνήθως μία διαίρεση :

	133	διά 23 = 5 ,	ὑπόλοιπο	= 18,
κάτω τό 0:	180	" 23 = 7 ,	"	= 19,
" " ":	190	" 23 = 8 ,	"	= 6,
" " ":	60	" 23 = 2 ,	"	= 14,
" " ":	140	" 23 = 6 ,	"	= 2,
" " ":	20	" 23 = 0 ,	"	= 20
" " ":	200	" 23 = 8 ,	"	= 16
" " ":	160	...... κ.ο.κ. ...		

Τό πηλίκο εἶναι λοιπόν 133/23 = 5.782608...
Μέ τόν τρόπο αὐτό συνεχίζοντας μποροῦμε νά βροῦμε ὁσαδήποτε ψηφία θέλομε.
Τό ἑπόμενο πρόγραμμα μιμεῖται αὐτήν τήν διαδικασία καί εὑρίσκει 500 ψηφία τοῦ πηλίκου δύο θετικῶν ἀκεραίων M/N τά ὁποῖα τοποθετεῖ στό διάνυσμα PSIFIO(500) .

Πρόγραμμα :

```
C   P9.1    DIAIRESH AKERAION
C
C   AKER   = AKERAIO MEROS TOY M/N
C   PSIFIO = TA META THN YPODIASTOLH PSIFIA TOY M/N
C   YPOL   = YPOLOIPO THS DOKIMHS
        INTEGER AKER,PSIFIO,YPOL
        DIMENSION PSIFIO(500)
        M=1
        N=149
        AKER=M/N
        YPOL=M-AKER*N
C
C   YPOLOGISMOS TON PSIFIO(1), PSIFIO(2),..., PSIFIO(500)
        DO 11 I=1,500
C
C   KATO TO 0...
        YPOL=YPOL*10
C
C   TO EPOMENO PSIFIO
        PSIFIO(I)=YPOL/N
C                                              (*)
C   TO YPOLOIPO THS DOKIMHS
        YPOL=YPOL-PSIFIO(I)*N
     11 CONTINUE
C
C   EKTYPOSH
        WRITE(6,200) M,N
    200 FORMAT(1H ,2HM=,I8,4H, N=,I8)
        WRITE(6,100) AKER,PSIFIO
    100 FORMAT(5HOM/N=,I6,1H.,50I1/9(12X,50I1/))
        STOP
        END
```

(σχ. 1)

Ἀποτέλεσματα :

```
M=        1, N=      149

M/N=      0.00671140939597315436241610738255033557046979865771
            81208053691275167785234899328859060402684563758389
            26174496644295302013422818791946308724832214765100
            67114093959731543624161073825503355704697986577181
            20805369127516778523489932885906040268456375838926
            17449664429530201342281879194630872483221476510067
            11409395973154362416107382550335570469798657718120
            80536912751677852348993288590604026845637583892617
            44966442953020134228187919463087248322147651006711
            40939597315436241610738255033557046979865771812080
```

(σχ. 2)

α) Τό τμῆμα (*) τοῦ προγράμματος λέγεται "ὁ 11-DO-κύκλος" (χαρακτηρίζεται ἀπ' τήν μάρκα 11), λειτουργεῖ δέ ὡς ἑξῆς:

Ὅταν ὁ ὑπολογιστής φτάσει στό DO τότε διατρέχει τό (*) 500 φορές διαδοχικά, αὐξάνοντας κάθε φορά τό I κατά 1.

Συγκεκριμένα, ἀρχίζοντας μέ I=1 ἐκτελεῖ τό τμῆμα (*) τοῦ προγράμματος μέχρι τό CONTINUE , ἀπ' ἐκεῖ ξαναγυρίζει στό DO αὐξάνει τό I κατά 1 κ.ο.κ. Τήν τελευταία φορά ἀφοῦ ἐκτελέσει τό (*) μέ I=500 "ἐξέρχεται" ἀπό τόν DO-κύκλο καί προχωρεῖ μέ τήν ἐντολή μετά τό CONTINUE .

β) Κάθε φορά πού διατρέχεται ὁ DO-κύκλος τοῦ P9.1 ὑπολογίζεται καί ἕνα δεκαδικό ψηφίο τοῦ πηλίκου M/N .

γ) Ἡ ἐντολή CONTINUE χρησιμεύει σάν "κάτω ἄκρο" τοῦ DO Ὁ DO-κύκλος ἀποτελεῖται ἀπό τίς ἐντολές ἀνάμεσα στό DO καί στό CONTINUE .

δ) Ἐάν μ συμβολίζη μία μάρκα τότε ἡ γενική μορφή ἑνός μ-DO-κύκλου ἔχει ὡς ἑξῆς :

```
      .
      .
      .
      DO μ  ι=ν1,ν2,ν3
      .                     \
      .                      } (**)
      .                     /
    μ CONTINUE
      .
      .
      .
```

ι, ν_1, ν_2, ν_3 εἶναι INTEGER μεταβλητές καί παίρνουν <u>μόνο</u> θετικές τιμές. Τό ν_3 παραλείπεται ὅταν $\nu_3=1$ (δές P9.1), ἄλλως συμβολίζει τό "βῆμα" μέ τό ὁποῖο μεταβάλλεται ὁ δείκτης ι τοῦ DO-κύκλου. Ἡ λειτουργία τοῦ DO-κύκλου ἐξηγεῖται ὅπως στό παράδειγμα α). Ὅταν ὁ ὑπολογιστής φτάσει στό DO τότε ἀρχίζοντας μέ $\iota=\nu_1$ διατρέχει τό τμῆμα (**) τοῦ προγράμματος μέχρι τό CONTINUE , ἀπ' ἐκεῖ ξαναγυρίζει στό DO αὐξάνει τό ι κατά ν_3 κ.ο.κ. Τέλος ἐξέρχεται ἀπ' τόν DO-κύκλο ὅταν συμβῆ $\iota+\nu_3 \geqq \nu_2$.

ε) Τό 9(12X,50I1/) σημαίνει ἐπανάληψη τῆς ὁμάδας 12X,50I1/ 9 φορές, ἰσοδυναμεῖ ἑπομένως μέ τό 12X,50I1/12X,50I1/12X,50I1/...κ.τ.λ. (9 φορές).

Ἐν γένει $n(k_1,k_2,\ldots,k_m)$ σημαίνει ἐπανάληψη n-φορές τῆς ὁμάδας $k_1,k_2,\ldots,k_m$ ὅπου k_i ὁδηγίες-κώδικες τοῦ FORMAT (δές §6).

Σέ ἕνα FORMAT ἐπιτρέπεται νά ὑπάρχουν περισσότερες ὁμάδες κωδίκων π.χ.

```
100 FORMAT(1H ,2I5,3(E15.7,1H,),2(3H A=,I5))
```

Ἐάν τό πλῆθος τῶν μεταβλητῶν τῆς λίστας ἑνός WRITE ἤ READ ξεπερνᾶ τό πλῆθος τῶν κωδίκων τοῦ ἀντιστοίχου FORMAT τότε οἱ μεταβλητές τῆς λίστας πού περισσεύουν γράφονται/διαβάζονται μέ τήν τελευταία ὁμάδα κωδίκων πρός τά δεξιά π.χ. μέ τό προηγούμενο FORMAT καί τήν

WRITE(6,100) N1,N2,D,G,H,M1,M2,M3,M4,M5,M6

γράφονται τά M3,M4 μέ τό 2(3H A=,I5)

καί τά M5,M6 μέ τό 2(3H A=,I5) ἐπίσης.

35682	διά	10	=	3568	, ὑπόλοιπο = 2
3568	διά	10	=	356	, ὑπόλοιπο = 8
356	διά	10	=	35	, ὑπόλοιπο = 6
35	διά	10	=	3	, ὑπόλοιπο = 5
3	διά	10	=	0	, ὑπόλοιπο = 3

Μέ τίς παραπάνω διαδοχικές διαιρέσεις μέ τό 10 εὑρίσκομε τά ψηφία ἑνός δοθέντος ἀκεραίου (διάβασε τήν τελευταία στήλη ἀπό κάτω πρός τά πάνω).

'Αναλόγως θά μπορούσαμε νά διαιρέσωμε διαδοχικά μέ ἕναν ἄλλο ἀριθμό B, π.χ. B=5

35682	διά	5	=	7136	, ὑπόλοιπο = 2
7136	διά	5	=	1427	, ὑπόλοιπο = 1
1427	διά	5	=	285	, ὑπόλοιπο = 2
285	διά	5	=	57	, ὑπόλοιπο = 0
57	διά	5	=	11	, ὑπόλοιπο = 2
11	διά	5	=	2	, ὑπόλοιπο = 1
2	διά	5	=	0	, ὑπόλοιπο = 2

γράφοντας τήν τελευταία στήλη ἐκ τῶν κάτω πρός τά ἄνω :

$$(2\ 1\ 2\ 0\ 2\ 1\ 2)_5$$

παίρνομε τήν γραφή τοῦ ἀριθμοῦ 35682 στό 5-δικό σύστημα ἤ ὡς πρός βάση 5. 'Αναλόγως μποροῦμε νά ὑπολογίσωμε τήν γραφή $(\alpha_1\alpha_2...\alpha_\nu)_B$ ἑνός οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ὡς πρός τήν βάση B. Τά $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu$ λέγονται ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ ὡς πρός τήν βάση B καί εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί ἀπό τό σύνολο $\{0,1,2,3,...,(B-1)\}$. $X=(\alpha_1\alpha_2...\alpha_\nu)_B$ σημαίνει

$$X=\alpha_1\cdot B^{\nu-1}+\alpha_2\cdot B^{\nu-2}+...+\alpha_{\nu-1}\cdot B+\alpha_\nu$$

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα μιμεῖται τήν παραπάνω μέθοδο ὑπολογισμοῦ τῶν ψηφίων ἑνός δοθέντος ἀκεραίου X ὡς πρός δοθεῖσα βάση B.

Πρόγραμμα :

```
C   P9.2    GRAFH DOTHENTOS AKERAIOY X OS PROS BASH B
C
C   PSIFIO = PSIFIA TOY X OS PROS BASH B
C   BOH    = BOHTHITIKO DIANYSMA
       INTEGER PSIFIO, BOH, PHLIKO, X, B
       DIMENSION PSIFIO(100),BOH(100)
       B=5
       X=35682
       PHLIKO=35682
C
C   YPOLOGISMOS TON PSIFION
       DO 11 I=1,100
       BOH(I)=PHLIKO-PHLIKO/B*B
       PHLIKO=PHLIKO/B
       IF(PHLIKO.EQ.0) GO TO 22            ... (*)
    11 CONTINUE
C
C   H PAROYSA TIMH TOY I = PLHTHOS TON PSIFION TOY X OS PROS B
C   ANTISTROFH DIATAXH TOY BOH DIDEI TO PSIFIO
    22 DO 33 J=1,I
       PSIFIO(J)=BOH(I+1-J)
    33 CONTINUE
C
C   TYPOSE TA I PSIFIA TOY X OS PROS BASH B
       WRITE(6,713) X,B,(PSIFIO(K),K=1,I)
   713 FORMAT(1H0,2X,10HO ARITHMOS,3H X=,I11,
      1         14H  GRAFETAI STH/16H          BASH B=,
      2         I5 /16H                X=,100I1)
       STOP
       END
```

(σχ. 3)

'Αποτελέσματα :

```
 O ARITHMOS X=      35682   GRAFETAI STH
          BASH B=     5
                 X=2120212
```

ζ) Μέ τήν έντολή (*) έξερχόμεθα άπό τόν 11-DO-κύκλο (ένδεχομένως πρίν τοῦτος όλοκληρωθῆ) ὅταν συμβῆ τό PHLIKO=0 . Τό I φέρει μετά τήν ἔξοδο άπ' τόν DO-κύκλο τήν τιμή πού εἶχε τήν στιγμή τῆς έξόδου.

η) Τό (PSIFIO(K),K=1,I) λέγεται "πεπλεγμένος DO-κύκλος" καί εἶναι ἰσοδύναμος μέ τήν λίστα τῶν μεταβλητῶν PSIFIO(1),PSIFIO(2),...,PSIFIO(I).

θ) 'Εν γένει πεπλεγμένοι DO-κύκλοι έμφανίζονται μόνο σέ μιά έντολή WRITE (ἤ READ, δές έπομένη παράγραφο) μέ τήν γενική μορφή

WRITE(6,100) A,B,...κ.τ.λ. (C(I),I=ν_1,ν_2,ν_3),D,..κ.τ.λ.

π.χ. WRITE(6,376) E,B,BA,(TOM(K2),K2=5,50,10),E1,ENA

ή λειτουργία τοῦ πεπλεγμένου DO-κύκλου εἶναι ἡ ἴδια μέ τήν τοῦ DO-κύκλου. Τό τελευταῖο WRITE λ.χ. ἰσοδυναμεῖ μέ τήν ἐντολή

```
      WRITE(6,376)E,B,BA,TOM(5),TOM(15),TOM(25),TOM(35),TOM(45),
     1            E1,ENA
```

Τό ἐσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων n-διαστάσεων, $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ καί $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ εἶναι ἕνας ἀριθμός σ πού ὁρίζεται ὡς ἑξῆς

$$\sigma = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+\ldots+x_ny_n$$

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα ὑπολογίζει τό ἐσωτερικό γινόμενο τῶν δύο διανυσμάτων (1.5,2.5,...,6.5) καί (6.5,5.5,...,1.5).

Πρόγραμμα :

```
C   P9.3    ESOTERIKO GINOMENO DIANYSMATON
C
      DIMENSION  X(6),Y(6)
C
C   ORISMOS TON X,Y
      DO 11 I=1,6
      X(I)=FLOAT(I)+0.5
      Y(I)=FLOAT(7-I)+0.5
   11 CONTINUE
C
C   YPOLOGISMOS ESOTERIKOY GINOMENOY
      S=0.
      DO 22 I=1,6
      S=S+X(I)*Y(I)
   22 CONTINUE
C   EKTYPOSH
C
      WRITE(6,1000) X
      WRITE(6,1000) (Y(I),I=1,6)
      WRITE(6,1000) S
 1000 FORMAT(1H0,1P10E11.3)
      STOP
      END
```

(σχ. 4)

Ἀποτελέσματα :

```
1.500E 00  2.500E 00  3.500E 00  4.500E 00  5.500E 00  6.500E 00

6.500E 00  5.500E 00  4.500E 00  3.500E 00  2.500E 00  1.500E 00

7.850E 01
```

(σχ. 5)

Δοθέντων τῶν μητρῶν $A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,m} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{q,1} & b_{q,2} & \cdots & b_{q,m} \end{pmatrix}$

ὁρίζεται ἡ μήτρα γινόμενο, ἐφ'ὅσον ἰσχύει $n=q$, ὡς ἑξῆς :

$C=AB$ μέ

$C=\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,m} \\ c_{2,1} & c_{2,1} & \cdots & c_{2,m} \\ & & & \\ c_{p,1} & c_{p,2} & \cdots & c_{p,m} \end{pmatrix}$

ὅπου

$c_{i,j}=a_{i,1}b_{1,j}+a_{i,2}b_{2,j}+\ldots+a_{i,n}b_{n,j}$

= ἐσωτερικό γινόμενο τῆς i-γραμμῆς τῆς A μέ τήν j-στήλη τῆς B .

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα ὑπολογίζει τό γινόμενο C=AB γιά τίς μῆτρες A(7,6),B(6,5) τῶν ὁποίων τά στοιχεῖα δίδονται ἀπό τούς τύπους $a_{i,j}=\dfrac{1}{2i+j}$, $b_{i,j}=2i+j$.

<u>Πρόγραμμα :</u>

```
C   P9.4    POLLAPLASIASMOS MHTRON
C
      DIMENSION  A(7,6), B(6,5), C(7,5)
C
C   ORISMOS THS MHTRAS A
      DO 11 I=1,7
            DO 22 J=1,6                    }
            A(I,J)=1./FLOAT(2*I+J)         }   (*)
   22       CONTINUE                       }
   11 CONTINUE
C
C   ORISMOS THS MHTRAS B
      DO 33 I=1,6
            DO 44 J=1,5
            B(I,J)=FLOAT(2*I+J)
   44       CONTINUE
   33 CONTINUE
C
C   POLLAPLASIASMOS TON MHTRON C=AB       }
      DO 55 I=1,7                          }
            DO 66 J=1,5                    }
            S=0.                           }   (**)
                  DO 77 K=1,6              }
                  S=S+A(I,K)*B(K,J)        }
   77             CONTINUE                 }
            C(I,J)=S
   66       CONTINUE
   55 CONTINUE
```

(σχ. 6)

```
C
C
C   TYPOSE TIS MHTRES
C
C   TYPOSE THN A
        DO 88 I=1,7
        WRITE(6,1000) (A(I,J),J=1,6)
    88 CONTINUE
        WRITE(6,2000)
C
C   TYPOSE THN B
        DO 99 I=1,6
        WRITE(6,1000) (B(I,J),J=1,5)
    99 CONTINUE
        WRITE(6,2000)
C
C   TYPOSE THN C
        DO 111 I=1,7
        WRITE(6,1000) (C(I,J),J=1,5)
   111 CONTINUE
  1000 FORMAT(1H ,1P10E10.2)
  2000 FORMAT(1H0)
        STOP
        END
```

(σχ. 6 συνέχεια)

'Αποτελέσματα :

3.33E-01	2.50E-01	2.00E-01	1.67E-01	1.43E-01	1.25E-01
2.00E-01	1.67E-01	1.43E-01	1.25E-01	1.11E-01	1.00E-01
1.43E-01	1.25E-01	1.11E-01	1.00E-01	9.09E-02	8.33E-02
1.11E-01	1.00E-01	9.09E-02	8.33E-02	7.69E-02	7.14E-02
9.09E-02	8.33E-02	7.69E-02	7.14E-02	6.67E-02	6.25E-02
7.69E-02	7.14E-02	6.67E-02	6.25E-02	5.88E-02	5.56E-02
6.67E-02	6.25E-02	5.88E-02	5.56E-02	5.26E-02	5.00E-02

3.00E+00	4.00E+00	5.00E+00	6.00E+00	7.00E+00
5.00E+00	6.00E+00	7.00E+00	8.00E+00	9.00E+00
7.00E+00	8.00E+00	9.00E+00	1.00E+01	1.10E+01
9.00E+00	1.00E+01	1.10E+01	1.20E+01	1.30E+01
1.10E+01	1.20E+01	1.30E+01	1.40E+01	1.50E+01
1.30E+01	1.40E+01	1.50E+01	1.60E+01	1.70E+01

8.35E+00	9.56E+00	1.08E+01	1.20E+01	1.32E+01
6.08E+00	6.93E+00	7.77E+00	8.62E+00	9.46E+00
4.81E+00	5.47E+00	6.12E+00	6.77E+00	7.43E+00
3.99E+00	4.53E+00	5.06E+00	5.60E+00	6.13E+00
3.42E+00	3.87E+00	4.32E+00	4.77E+00	5.22E+00
2.99E+00	3.38E+00	3.77E+00	4.16E+00	4.55E+00
2.65E+00	3.00E+00	3.35E+00	3.69E+00	4.04E+00

(σχ. 7)

ι) Τό (*) τμῆμα τοῦ προγράμματος λέγεται ἕνας κιβωτισμός DO-κύκλων. Ὁ 11-DO-κύκλος εἶναι "ὁ ἐξωτερικός", ὁ 22-DO-κυκλος εἶναι "ὁ ἐσωτερικός".

κ) Ἡ λειτουργία τοῦ κιβωτισμοῦ εἶναι ἡ ἴδια μέ τήν λειτουργία τοῦ DO (δές α) , ἁπλῶς τό περιεχόμενο τοῦ 11-DO-κύκλου εἶναι πάλι ἕνας DO-κύκλος. Κατ' ἀρχήν τίθεται I=1, καί ἐκτελεῖται τό 22-DO μέ J=1,...,6, κατόπιν γίνεται I=2 καί ἐκτελεῖται πάλι τό 22-DO μέ J=1,...,6 κ.ο.κ.

λ) Ὁ κιβωτισμός μπορεῖ νά περιέχη ὁσουσδήποτε DO-κύκλους θέλομε (π.χ. τό (**) τμῆμα τοῦ προγράμματος εἶναι κιβωτισμός μέ 3 DO-κύκλους).

μ) Ἔχει καθιερωθῆ μεταξύ τῶν προγραμματιστῶν ἡ συνήθεια, νά γράφωνται οἱ ἐντολές πού περιλαμβάνονται σ' ἕναν DO-κύκλc μερικά διαστήματα δεξιώτερα τῶν ὑπολοίπων ἐντολῶν . Τοῦτο διευκολύνει πολλές φορές τήν ἀνάγνωση τοῦ προγράμματος, ἰδιαίτερα ὅταν οἱ DO-κύκλοι περιέχουν πολλές ἐντολές. Σημείωσε ὅτι ἡ FORTRAN ἐπιτρέπει νά γράφωμε τίς λέξεις μιᾶς ἐντολῆς μέ ὁσαδήποτε κενά διαστήματα μεταξύ των θέλομε (δές ἐπίσης τόν περιορισμό 6.σ).

Ἀσκήσεις

P9.5 Προσδιόρισε μέ τό P9.1 τό πηλίκον 47/61 , ὁμοίως τά 1/17 , 1/19 , 1/51 , 1/61 .

P9.6 Τροποποίησε τό P9.1 ἔτσι ὥστε ὅταν τό ὑπόλοιπο τῆς δοκιμῆς εἶναι 0 τότε νά μήν ὑπολογίζη ἄλλα δεκαδικά ψηφία καί νά τυπώνη τόν ἀριθμό

π.χ. 1/2 νά τυπώνεται 0.5 καί ὄχι 0.500000...
1/4 " " " 0.25 " " 0.250000000.....

P9.7 Ἐξήγησε τί ὑπολογίζει ὁ 11-DO-κύκλος τοῦ P9.2 ὁμοίως τί ὑπολογίζει ὁ 22-DO-κύκλος τοῦ P9.2

P9.8 Ὑπολόγισε μέ τό P9.2 πῶς γράφεται τό 1000 ὡς πρός βάση B=9 .

P9.9 Ὑπολόγισε τροποποιῶντας τό P9.6 τούς ἀντιστρόφους $\frac{1}{\nu}$ τῶν πρώτων 1000 ἀριθμῶν $\nu=1,2,\ldots,1000$.

P9.10 Ὑπολόγισε μέ τό P9.2 πῶς γράφονται οἱ πρῶτοι 1000 ἀριθμοί ὡς πρός βάση B=9 .

P9.11 Τροποποιῶντας τό P9.10 ὑπολόγισε μέ ἕνα πρόγραμμα καί τύπωσε τόν πίνακα τῶν ἀριθμῶν 1,...,200 γραμμένων στίς βάσεις B=2,3,4,5,6,7,8,9 .

P9.12 Πόσα διαφορετικά ψηφία ἔχει τό σύστημα μέ βάση B=2
" " " " " " " " B=5
" " " " " " " " B=16
" " " " " " " B=100000

Πῶς γράφεται ὁ ἀριθμός 375638115 ὡς πρός τήν βάση B=100000 (ἀπάντησε ἀμέσως χωρίς πρόγραμμα).

*P9.13 Κατασκεύασε ἕνα πρόγραμμα τό ὁποῖο γιά δύο 5-ψήφιους ἀκέραιους π.χ. 78955 καί 37653 εὑρίσκει τά ψηφία τοῦ γινομένου τους ὡς πρός τήν βάση B=100000 .

P9.14 Ἐξήγησε πῶς καί τί ὑπολογίζει ὁ 22-DO-κύκλος τοῦ P9.3 .

P9.15 Ἐξήγησε τήν λειτουργία τῶν WRITE-ἐντολῶν τοῦ P9.3

P9.16 Ἐξήγησε πῶς καί τί ὑπολογίζουν οἱ DO-κύκλοι 11, 33 και 55 τοῦ P9.4

P9.17 Ἐξήγησε τήν λειτουργία τῶν DO-κύκλων 88,99 καί 111 τοῦ P9.4 .

P9.18 Κατασκεύασε ἕνα πρόγραμμα τό ὁποῖο χρησιμοποιῶντας ἕνα DO-κύκλο καί τό διάνυσμα FIB(100), ὑπολογίζει καί τυπώνει ὅλους τούς ἀριθμούς τοῦ Fibonacci πού εἶναι $\leq 2^{31}-1$ (δές P5.2 καί P8.9). Τά ἀποτελέσματα θέλομε νά τυπώνωνται κατά τόν ἑξῆς τρόπο :

```
1-OS ARITHMOS TOY FIBONACCI =   1
2-OS ARITHMOS TOY FIBONACCI =   1
   ...                ...
```

P9.19 Ὑπολόγισε μέ τό P9.3 τό ἐσωτερικό γινόμενο τῶν διανυσμάτων (3.5,7.2,6.3), (3.6,3.1,-15.5) .

P9.20 Ὑπολόγισε μέ τό P9.4 τό γινόμενο C τῶν μητρῶν

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \cdots & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \cdots & a_{2,5} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot \;\; \cdots & \cdot\cdot \\ a_{5,1} & a_{5,2} \cdots & a_{5,5} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \cdots & b_{1,5} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \cdots & b_{2,5} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot \;\; \cdots & \cdot\cdot \\ b_{5,1} & b_{5,2} & b_{5,5} \end{pmatrix}$$

μέ $a_{i,j} = \frac{1}{i+j}$, $b_{i,j} = i+j$.

P9.21 Πῶς μποροῦμε νά προσδιορίσωμε τά ψηφία ἑνός ἀριθμοῦ x μέ 0<x<1 ; π.χ. x =0.34237
Πῶς μποροῦμε νά παραστήσωμε τό x ὡς πρός δοθεῖσα βάση B;
Προσδιόρισε τά ψηφία τοῦ 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001, 0.000001, 0.0000001 ὡς πρός βάση B=16 .

10

Ἡ ἐντολή DATA

$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$
$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$, ἐν γένει ἰσχύει

$$(x+y)^n = x^n+nx^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}x^{n-3}y^3+\ldots+y^n$$

Τούς συντελεστές $\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdots(p-1)\cdot p}$ πού ὑπεισέρχονται στό δεξιό μέρος τούς λέμε δυωνυμικούς συντελεστές. Ὁρίζουμε ἀκόμη $\binom{0}{0} = \binom{n}{0} = 1$.
Δέν εἶναι δύσκολο νά ἀποδειχθῆ ὅτι

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} \qquad (*)$$

Βάσει αὐτοῦ τοῦ τύπου κατασκευάζεται τό λεγόμενο τρίγωνο τοῦ Pascal

```
                1
             1     1
          1     2     1
       1     3     3     1
    1     4     6     4     1
 1     5    10    10     5
...   ...   ...   ...   ...
```

τό ὁποῖο δίδει τούς δυωνυμικούς συντελεστές. Ἐκτός τῶν ἀκραίων ἀριθμῶν (=1), κάθε ἀριθμός μιᾶς σειρᾶς προκύπτει σάν ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν ὑπεράνω του. Τό τρίγωνο ἐκτείνεται ἐπ' ἄπειρον πρός τά κάτω. Τό $\binom{n}{p}$ δίδεται ἀπό τό p+1 στοιχεῖο τῆς n+1 γραμμῆς τοῦ τριγώνου. Τό ἑπόμενο πρόγραμμα τυπώνει μέ τήν βοήθεια μιᾶς μήτρας C(20,20) τίς 16 πρῶτες σειρές τοῦ τριγώνου τοῦ Pascal.

Πρόγραμμα :

```
C  P10.1    TO TRIGONO TOY PASCAL
C
        INTEGER        C
        DIMENSION      C(20,20)
C
C  OI DYO PROTES SEIRES
        DATA  C(1,1),C(2,1),C(2,2)/3*1/
        WRITE(6,100) C(1,1)
        WRITE(6,100) C(2,1),C(2,2)
   100  FORMAT(3H   ,20I6)
C
C  OI YPOLOIPES SEIRES  55-DO-KYKLOS
        DO 55 I=3,16
C
C  TA AKRA THS SEIRAS = 1
        C(I,1)=1
        C(I,I)=1
C
C  TA YPOLOIPA STOIXEIA THS SEIRAS  66-DO KYKLOS
        K=I-1
             DO 66 L=2,K
             C(I,L)=C(I-1,L-1)+C(I-1,L)
    66       CONTINUE
C
        WRITE(6,100) (C(I,L),L=1,I)
    55  CONTINUE
        STOP
        END
```

(σχ. 1)

Ἀποτελέσματα :

```
1
1   1
1   2    1
1   3    3    1
1   4    6    4    1
1   5   10   10    5    1
1   6   15   20   15    6    1
1   7   21   35   35   21    7    1
1   8   28   56   70   56   28    8    1
1   9   36   84  126  126   84   36    9    1
1  10   45  120  210  252  210  120   45   10    1
1  11   55  165  330  462  462  330  165   55   11    1
1  12   66  220  495  792  924  792  495  220   66   12
1  13   78  286  715 1287 1716 1716 1287  715  286   78
1  14   91  364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001  364
1  15  105  455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365
```

(σχ. 2)

α) Μέ τήν ἐντολή DATA πού τοποθετεῖται στήν ἀρχή ἑνός προγράμματος μποροῦμε νά δώσουμε τιμές σέ ὁρισμένες μεταβλητές. Ἡ γενική μορφή τῆς ἐντολῆς εἶναι

DATA $\underline{λιστα_1}$/$\underline{σταθερες_1}$/,$\underline{λιστα_2}$/$\underline{σταθερες_2}$/,...

$\underline{λιστα_ι}$ συμβολίζει μιά ἀκολουθία ἀπό ὀνόματα μεταβλητῶν.
$\underline{σταθερες_ι}$ συμβολίζει μιά ἀκολουθία σταθερῶν τοῦ ἰδίου πλήθους μέ τῆς $\underline{λιστα_ι}$.

Ἐάν μιά σταθερά ξ π.χ. 3.5 ὑπεισέρχεται ν φορές (π.χ.15) μποροῦμε ἀντί τῆς ξ,ξ,ξ,...(ν-φορές) νά γράψωμε συντόμως

ν*ξ (π.χ. 15*3.5)

ἔτσι λ.χ. ἡ DATA ἐντολή τοῦ προηγουμένου προγράμματος εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν

DATA C(1,1),C(2,1),C(2,2)/1,1,1/

Τό ἀποτέλεσμα τῆς ἐντολῆς αὐτῆς εἶναι νά ἐφοδιάζωνται οἱ μεταβλητές τῆς $\underline{λιστα_ι}$ μέ τίς ἀντίστοιχες σταθερές τῆς $\underline{σταθερες_ι}$. Ἀντίστοιχες μεταβλητές καί σταθερές πρέπει νά εἶναι τοῦ ἰδίου τύπου (π.χ. REAL).

Ἕνας φυσικός ἀριθμός >1 λέγεται πρῶτος ὅταν οἱ μόνοι διαιρέτες του εἶναι ὁ ἑαυτός του καί ἡ μονάδα. 2,3,5,7,11,13, 17,19,23,... εἶναι πρῶτοι ἀριθμοί. Κάθε μή πρῶτος ἀριθμός ἀναλύεται σέ γινόμενο πρώτων π.χ. $3003=3\cdot7\cdot11\cdot13$ (δές P5.13).

Το "κόσκινο τοῦ Ἐρατοσθένη", ὅπως λέγεται, προσδιορίζει διαδοχικά τούς πρώτους ἀριθμούς ὡς ἑξῆς :

1ον) Ὁ πρῶτος πρῶτος εἶναι ὁ 2, ὁ δεύτερος ὁ 3,

2ον) Ἔστω ὅτι προσδιορίσθηκαν οἱ πρῶτοι n πρῶτοι

$$p_1,p_2,p_3,p_4,\ldots,p_n$$

3ον) Ὁ ἑπόμενος πρῶτος εἶναι ἐνδεχομένως ὁ

$$x = p_n+2$$

4ον) Ἔλεγχος : Διαιρεῖται ὁ x μέ κάποιον ἀπ' τούς

$$p_1,p_2,p_3,p_4,\ldots,p_n \;;$$

ναί : τότε x δέν εἶναι πρῶτος, πάρε x=x+2 καί πήγαινε πάλι στό 4ον) .

ὄχι : τό x εἶναι ὁ ἑπόμενος πρῶτος $p_{n+1}= x$, πήγαινε πάλι στό 2ον) .

Σημείωσε ὅτι κατά τόν ἔλεγχο ἀρκεῖ νά ἐξετάσωμε ἄν ὁ x διαιρεῖται μέ τούς προηγούμενους ἐκ τῶν πρώτων $p_1, p_2, \ldots, p_n$ οἱ ὁποῖοι εἶναι μικρότεροι τοῦ $\sqrt{x}$.

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα ὑπολογίζει τούς 1000 πρώτους πρώτους.

Πρόγραμμα :

```
C   P10.2   TO KOSKINO TOY ERATOSTHENH
C
          INTEGER  P,X,RIZA
          DIMENSION   P(1000)
          DATA P(1),P(2)/2,3/
C
C   O 11-DO-KYKLOS YPOLOGISEI TA P(3),...,P(1000)
          DO 11 I=3,1000
            X=P(I-1)
    22      X=X+2
            RIZA=INT(SQRT(FLOAT(X)))
C
C   ELEGXOS
            M=1
    33      M=M+1
            IF(P(M).GT.RIZA) GO TO 44
C
C   OTAN O X DIAIREITAI ME TO P(M), TOTE X DEN EINAI PROTOS
            IF(X-X/P(M)*P(M).EQ.0) GO TO 22
            GO TO 33
C
C   PROSDIORISMOS TOY EPOMENOY PROTOY
    44      P(I)=X
    11 CONTINUE
C   EKTYPOSH
          WRITE(6,1000)  ((I,P(I)),I=1,1000)
  1000 FORMAT(4(5H   P(,I4,2H)=,I5))
          STOP
          END
```

(σχ. 3)

Ἀποτελέσματα :

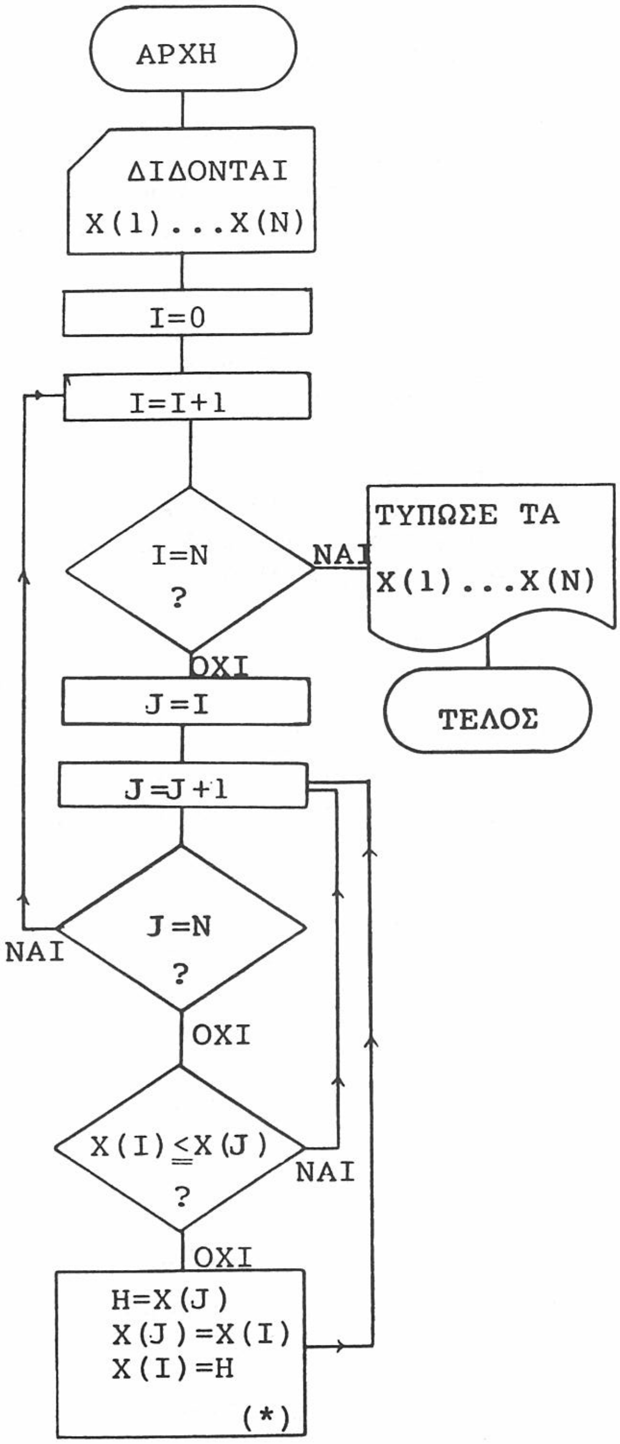
```
P(   1)=    2    P(   2)=    3    P(   3)=    5    P(   4)=    7
P(   5)=   11    P(   6)=   13    P(   7)=   17    P(   8)=   19
P(   9)=   23    P(  10)=   29    P(  11)=   31    P(  12)=   37
P(  13)=   41    P(  14)=   43    P(  15)=   47    P(  16)=   53
P(  17)=   59    P(  18)=   61    P(  19)=   67    P(  20)=   71
P(  21)=   73    P(  22)=   79    P(  23)=   83    P(  24)=   89
P(  25)=   97    P(  26)=  101    P(  27)=  103    P(  28)=  107
P(  29)=  109    P(  30)=  113    P(  31)=  127    P(  32)=  131
   ...              ...              ...              ...

P( 981)= 7727    P( 982)= 7741    P( 983)= 7753    P( 984)= 7757
P( 985)= 7759    P( 986)= 7789    P( 987)= 7793    P( 988)= 7817
P( 989)= 7823    P( 990)= 7829    P( 991)= 7841    P( 992)= 7853
P( 993)= 7867    P( 994)= 7873    P( 995)= 7877    P( 996)= 7879
P( 997)= 7883    P( 998)= 7901    P( 999)= 7907    P(1000)= 7919
```

(σχ. 4)

῞Ενα πρόβλημα τό ὁποῖο μπορεῖ νά διατυπωθῆ πολύ ἁπλά εἶναι τό πρόβλημα τῆς διατάξεως ἑνός συνόλου ἀριθμῶν:
Δίδεται ἕνα σύνολο ἀριθμῶν $x_1, x_2, x_2, \ldots, x_n$ καί ζητοῦμε μία μέθοδο μέ τήν ὁποία νά διατάσσωμε τό σύνολο αὐτό κατ' αὔξοντα μεγέθη.
Παρ' ὅλη τήν ἁπλότητα τῆς διατυπώσεως μπορεῖ ὁ ἀναγνώστης νά διαπιστώση (προσπαθῶντας μόνος του), ὅτι ἡ λύση τοῦ προβλήματος δέν εἶναι τετριμμένη. Ἐν γένει τά προβλήματα διατάξεως ἀποτελοῦν ἕνα ἐνδιαφέροντα κλάδο τοῦ προγραμματισμοῦ. Ὑπολογίζεται ὅτι περίπου ἕνα τέταρτο τοῦ χρόνου ἐργασίας τῶν ἠλ. ὑπολ. ἀναλίσκεται σέ διαδικασίες διατάξεως.
Τό ἑπόμενο πρόγραμμα δίδει τήν ἁπλούστερη ἴσως (ὄχι ὅμως καί ταχύτερη κατά τήν ἐκτέλεση μέ ἠλ. ὑπολ.) μέθοδο διατάξεως ἑνός διανύσματος X(1),X(2),...,X(N).
Ἡ μέθοδος ἔχει ὡς ἑξῆς (δές τό λογικό διάγραμμα στό σχ. 5)

Κατ' ἀρχήν φαίρνουμε στήν 1η θέση X(1) τό μικρότερο ἐκ τῶν X(1),X(2),...,X(N) . Τοῦτο γίνεται ὡς ἑξῆς.
Συγκρίνουμε τό X(1) μέ τό X(2). Ἐάν X(1) ≤ X(2) προχωροῦμε στήν σύγκριση τοῦ X(1) μέ τό X(3), κ.τ.λ.
Ἐάν X(1) > X(2) τότε ἐναλλάσουμε τίς τιμές τῶν X(1) καί X(2) (μέ τήν μέθοδο (*) στό λογικό διάγραμμα) καί προχωροῦμε στήν σύγκριση τοῦ παρόντος X(1) μέ τό X(3).
Ἐάν X(1) ≤ X(3) προχωροῦμε στή σύγκριση τοῦ X(1) μέ τό X(4), κ.τ.λ. Ἐάν X(1) > X(3) τότε ἐναλλάσουμε τίς τιμές τῶν X(1) καί X(3) (μέ τήν μέθοδο (*)) καί προχωροῦμε στήν σύγκριση τοῦ παρόντος X(1) μέ τό X(4) κ.ο.κ.
Κατ' αὐτό τόν τρόπο μετά ἀπ' ὅλες τίς συγκρίσεις τοῦ X(1) μέ τά X(2),...,X(N) καί τίς ἐνδεχόμενες ἐναλλαγές, ἔρχεται στή θέση X(1) τό μικρότερο ἐκ τῶν X(1),...,X(N).
Μέ τόν ἴδιο τρόπο φαίρνουμε στήν 2η θέση X(2) τό μικρότερο ἐκ τῶν X(2),...,X(N), κατόπιν στήν 3η θέση X(3) τό μικρότερο ἐκ τῶν X(3),...,X(N) κ.ο.κ. μέχρις ὅτου διατάξουμε ὅλα τά X(1),X(2),...,X(N) κατ' αὔξοντα μεγέθη.



Πρόγραμμα :

(σχ. 5)

```
C   P10.3  DIATAXH DIANYSMATOS
C
        DIMENSION X(10)
C   EFODIASMOS TOY X ME TIMES
        DATA X/3.,5.,-2.,2*1.,3*3.5,-7.,-10./
        N=10
        WRITE(6,200) X
        WRITE(6,99999)
C
```

(σχ. 6)

```
C   DIATAXH TOY X
       N1=N-1
       DO  1  I=1,N1
       M=I+1
            DO 2 J=M,N
            IF (X(I).LE.X(J)) GO TO 2
            H=X(J)
            X(J)=X(I)
            X(I)=H
     2      CONTINUE
     1 CONTINUE
C
C   EKTYPOSH
       WRITE(6,200) X
   200 FORMAT(1H ,5E12.4)
 99999 FORMAT(1H0)
       STOP
       END
```

(σχ. 6 συνέχεια)

<u>Ἀποτελέσματα :</u>

```
 0.3000E 01  0.5000E 01 -0.2000E 01  0.1000E 01  0.1000E 01
 0.3500E 01  0.3500E 01  0.3500E 01 -0.7000E 01 -0.1000E 02

-0.1000E 02 -0.7000E 01 -0.2000E 01  0.1000E 01  0.1000E 01
 0.3000E 01  0.3500E 01  0.3500E 01  0.3500E 01  0.5000E 01
```

(σχ. 7)

β) Στήν ἐντολή DATA τοῦ προηγουμένου προγράμματος τό X εἶναι ὄνομα διανύσματος μέ 10 διαστάσεις γι' αὐτό ἡ ἐντολή DATA πρέπει νά περιέχη 10 σταθερές, μιά γιά κάθε συνιστώσα τοῦ διανύσματος. Ὁ ἀνάλογος κανόνας ἰσχύει καί γιά μεταβλητές περισσοτέρων δεικτῶν.

γ) Κατά τήν χρήση ὀνόματος μεταβλητῆς μέ περισσότερους δεῖκτες στήν ἐντολή DATA ἰσχύουν οἱ 8.δ, 8.ε κανόνες. Ἔτσι λ.χ. οἱ ἐντολές

```
DIMENSION  A(3,2)
DATA  A/2*1.,4*3./
```

ἐφοδιάζουν τήν μήτρα A μέ τίς τιμές:

$$A = \begin{pmatrix} 1. & 3. \\ 1. & 3. \\ 3. & 3. \end{pmatrix} \quad \text{καί ὄχι} \quad A = \begin{pmatrix} 1. & 1. \\ 3. & 3. \\ 3. & 3. \end{pmatrix}$$

δ) Σημείωσε ὅτι ἡ χρήση (ὅπως στό παραπάνω πρόγραμμα) ὀνόματος διανύσματος ἤ μήτρας στήν ἐντολή DATA δέν ἐπιτρέπεται ἀπό τήν ANSI-FORTRAN . Ἐν τούτοις πολλοί ὑπολογιστές ὅπως ὁ IBM-370 παρέχουν αὐτή τήν δυνατότητα. Ἡ ἐντολή DATA τοῦ προηγουμένου προγράμματος θά ἔπρεπε σύμφωνα μέ τήν ANSI-FORTRAN νά γραφῆ:

```
DATA X(1),X(2),X(3),X(4),X(5),X(6),X(7),X(8),X(9),X(10)
*     /3.,5.,-2.,2*1.,3*3.5,-7.,-10./
```

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα καταχωρεῖ ἕναν νέο ἀριθμό X(N)=P στό ἤδη διατεταγμένο σύνολο X(1)≤X(2)≤X(3)≤...≤X(N-1) , ὡς ἑξῆς :

1ον) Συγκρίνει τά X(N-1),X(N)=P.
'Εάν X(N-1)≤X(N) τότε τυπώνει τό X.
'Εάν X(N-1)>X(N) τότε ἐναλλάσει τά X(N-1),X(N)
ὁπότε γίνεται X(N)=X(N-1) καί X(N-1)=P , κατόπιν

2ον) Συγκρίνει τά X(N-2),X(N-1)=P.
'Εάν X(N-2)≤X(N-1) τότε τυπώνει τό X.
'Εάν X(N-2)>X(N-1) τότε ἐναλλάσει τά X(N-2),X(N-1)
ὁπότε γίνεται X(N-1)=X(N-2),X(N-2)=P, κατόπιν

3ον) Συγκρίνει τά X(N-3), X(N-2)=P κ.ο.κ.

...

...

(N-1)ον) Συγκρίνει τά X(1),X(2)=P.
'Εάν X(1)≤X(2) τότε τυπώνει τό X.
'Εάν X(1)>X(2) ἐναλλάσει τά X(1),X(2)
ὁπότε γίνεται X(2)=X(1) καί X(1)=P, τυπώνει τό X.

<u>Πρόγραμμα :</u>

```
C   P10.4   KATAXORHSH NEOY ARITHMOY P SE DIATETAGMENO
C           DIANYSMA  X(1).LE.X(2).LE.X(3).....LE.X(N-1)
C
C
      DIMENSION X(10)
      DATA  X/1.,2.,3.,4.,5.,6.,7.,8.,9.,0./
      N=10
      P=2.5
C
C   O 11-DO-KYKLOS EYRISKEI TH SOSTH THESH TOY P METAXY
C   TON X(1),...,X(N-1).
      N1=N-1
      DO 11 I=1,N1
C   OTAN  P .GE. X(N-I)  TOTE
      X(N+1-I)=P
C   EINAI H SOSTH THESH TOY P METAXY TON X(1),...,X(N-1)
      IF(P.GE.X(N-I)) GO TO 22
C   ALLOS ENALLASSOYME TO X(N-1) ME TO X(N+1-I)=P
      X(N+1-I)=X(N-I)
   11 CONTINUE
      X(1)=P
C
   22 WRITE(6,200) (X(I),I=1,N)
  200 FORMAT(1H ,5E12.4)
      STOP
      END
```

'Αποτελέσματα :

0.1000E 01   0.2000E 01   0.2500E 01   0.3000E 01   0.4000E 01
0.5000E 01   0.6000E 01   0.7000E 01   0.8000E 01   0.9000E 01

'Ασκήσεις

P10.5 Γιατί στόν ἔλεγχο τοῦ P10.2 ἀρκεῖ νά ἐξετάσωμε ἄν ὁ x διαιρεῖται μέ τούς πρώτους πού εἶναι μικρότεροι τοῦ $\sqrt{x}$;

P10.6 Τροποποιῶντας κατάλληλα τό P10.2 κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο δοθέντος ἀκεραίου N εὑρίσκει καί τυπώνει ὅλους τούς πρώτους ἀριθμούς πού εἶναι μικρότεροι ἤ ἴσοι τοῦ N .

P10.7 Βάσει τοῦ P5.13 κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο δοθέντος τοῦ ἀριθμοῦ N ὑπολογίζει ἄν ὁ N εἶναι πρῶτος καί τυπώνει ἀναλόγως : O N EINAI PROTOS
O N DEN EINAI PROTOS

P10.8 Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο
1ον) Παράγει 1000 τυχαίους ἀριθμούς X(1),...
...,X(1000) μέ τό P8.4 ,
2ον) εὑρίσκει τούς δεῖκτες IMIN, IMAX μέ τήν ἰδιότητα X(IMIN)≤X(I) γιά ὅλα τά I=1,2,...
X(IMAX)≥X(I) " " " "
3ον) Τυπώνει τά IMIN, IMAX, X(IMIN), X(IMAX) .

P10.9 Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο γιά δοθέντα N<1000, Y=0.333333, E=0.02
1ον) Παράγει μέ τό P8.4 N τυχαίους ἀριθμούς

X(1),...,X(N)

2ον) εὑρίσκει ἐκείνους τούς δεῖκτες $I_1, I_2, \ldots, I_k$ γιά τούς ὁποίους ἀληθεύει ἡ

ABS(X(I)-Y).LT.E

3ον) τυπώνει τά Y, E καί τά ζεύγη $I_1, X(I_1), \ldots, I_k, X(I_k)$.

P10.10 Κατασκεύασε καί τύπωσε μέ τήν βοήθεια τῆς ἐντολῆς DATA τήν 10×10 μήτρα A τῆς ὁποίας τά στοιχεῖα εἶναι

A(I,J)=0 , ὅταν I≠J καί

A(I,I)=1 , γιά I=1,2,...,10 .

P10.11 Τροποποίησε τό P10.1 ἔτσι ὥστε νά τυπώνη τό τρίγωνο τοῦ Pascal χωρίς νά χρησιμοποιῆ μῆτρες παρά μόνο διανύσματα.

P10.12 Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο διατάσσει κατ' αὔξοντα μεγέθη τό δοθέν διάνυσμα X(1),X(2),...,X(N) χρησιμοποιῶντας τό P10.4 ὡς ἑξῆς :

1ον) διατάσσει τό σύνολο {X(1),X(2)}

2ον) κατόπιν τό σύνολο {X(1),X(2),X(3)=P}

3ον) κατόπιν τό σύνολο {X(1),X(2),X(3),X(4)=P}

... κ.ο.κ.

11

Ἡ ἐντολή READ (διάβασε)

Οἱ κώδικες aFw.d καί aGw.d

Προγράμματα χρησιμοποιοῦμε συνήθως γιά τήν ἐπίλυση ἀκριβῶς καθωρισμένων προβλημάτων τῶν ὁποίων ὅμως τά πρός ἐπεξεργασίαν δεδομένα διαφέρουν ποιοτικά καί ποσοτικά ἀπό περίπτωση σέ περίπτωση. Στήν προσαρμοστικότητα ἀνάλογα πρός τήν είδική περίπτωση, πού ἀπαιτεῖται ἀπό ἕνα πρόγραμμα, συνεισφέρει ἡ ἐντολή READ(=διάβασε) ἡ ὁποία παρέχει τήν δυνατότητα νά ἐφοδιάσωμε μέ τιμές ἕνα ὁσοδήποτε μεγάλο πλῆθος μεταβλητῶν θέλουμε. Ἕνα ἀπλό παράδειγμα χρήσεως τῆς ἐντολῆς αὐτῆς δίδει τό ἑπόμενο πρόγραμμα στό ὁποῖο δίδονται ἕνας φυσικός $N \leq 1000$, N ἀριθμοί B(1),...,B(N) καί ὑπολογίζεται ἡ μέση τιμή τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.

Πρόγραμμα :

```
C  P11.1  MESH TIMH N-TO PLHTHOS ARITHMON OPOY N.LT.1000
C
      DIMENSION B(1000)
C
C  DIABASE TO N APO MIA KARTA
      READ(5,100) N
  100 FORMAT(I5)
C
C  DIABASE TA B(1),B(2),...,B(N)  POY EINAI TYPOMENA      (I)
C  SE KARTES APO DEKA SE KATHE KARTA
      READ(5,200) (B(I),I=1,N)
  200 FORMAT(10F8.3)
```

(σχ. 1)

```
C   TYPOSE TA B(1),...,B(N)
        WRITE(6,300) (B(I),I=1,N)        (II)
  300 FORMAT(5F10.3)
C
C   YPOLOGISE THN MESH TIMH = SN
        SN=0.
        DO 11 I=1,N
        SN=SN+B(I)
   11 CONTINUE
        SN=SN/FLOAT(N)
C
C   TYPOSE TO SN
        WRITE(6,400)  N, SN
  400 FORMAT(28HO MESH TIMH TON (B(1),...,B(,I5,3H))=,F10.3)
        STOP
        END
```

(σχ. 1 συνέχεια)

<u>'Αποτελέσματα :</u>

```
   1.500      2.230      3.580      3.560      6.320
  -5.400      3.500    -80.320      3.500      3.650
 -45.320    -26.230      0.235      3.200      8.900
  99.500     33.330      2.200     35.350     37.850

MESH TIMH TON (B(1),...,B(   20))=      4.557
```

(σχ. 2)

α) 'Η γενική μορφή τοῦ READ εἶναι

READ(N1,N2) <u>λιστα</u>

Τό N1 εἶναι συνήθως 5 καί συμβολίζει τό μηχάνημα ἀναγνώσεως, τό N2 εἶναι ἡ μάρκα τοῦ FORMAT μέ τό ὁποῖο διαβάζεται ἡ <u>λιστα</u> . 'Η <u>λιστα</u> εἶναι (ὅπως καί στό 4.ε) μία ἀκολουθία ἀπό ὀνόματα μεταβλητῶν πού χωρίζονται μεταξύ τους μέ ἕνα κόμμα.

β) Οἱ τιμές πού θέλουμε νά δώσουμε στίς μεταβλητές τῆς <u>λιστα</u> πρέπει νά τυπωθοῦν (μέ τήν σειρά πού ἐμφανίζονται στή <u>λιστα</u>) ἀπό τόν προγραμματιστή σέ ξεχωριστές κάρτες σύμφωνα μέ τούς κώδικες τοῦ FORMAT μέ μάρκα N2. Οἱ κάρτες αὐτές τίς ὁποῖες στό ἑξῆς θά τίς λέμε κάρτες δεδομένων (=data cards) τοποθετοῦνται μετά τίς κάρτες τοῦ προγράμματος.

γ) 'Ανάμεσα στίς κάρτες τοῦ προγράμματος καί τίς κάρτες δεδομένων πρέπει νά τοποθετηθοῦν ὡρισμένες J.C.L-κάρτες, (δές 1.ι) οἱ ὁποῖες διαφέρουν ἀπό ὑπολογιστή σέ ὑπολογιστή.

δ) Οἱ κώδικες τοῦ FORMAT κατά τήν ἐκτέλεση ἑνός READ ἔχουν τήν ἑξῆς σημασία (δές §6).

aEw.d : Διάβασε a-τό πλῆθος πραγματικούς ἀριθμούς πού καταλαμβάνουν w τυπογραφικές θέσεις καθένας καί ἔχουν d ψηφία μετά τήν ὑποδιαστολή.

aIw : Διάβασε a-τό πλῆθος ἀκεραίους ἀριθμούς πού καταλαμβάνουν w τυπογραφικές θέσεις ὁ καθένας.

ε) Πολύ προσοχή χρειάζεται ἀπό τόν προγραμματιστή ὅταν τυπώνει τίς τιμές στίς κάρτες δεδομένων. Ἐάν οἱ ἀριθμοί διαβάζονται μέ τούς κώδικες Ew.d καί aIw καί ἔχουν λιγότερα ἀπό w ψηφία, τότε πρέπει νά τυπώνωνται στήν κάρτα, ἔτσι ὥστε τά κενά διαστήματα ἐκ τῶν w πού περισσεύουν νά εἶναι ὅλα ἀριστερά τοῦ ἀριθμοῦ. Τοῦτο διότι κατά τήν ἐκτέλεση τοῦ READ τά κενά ἐκ τῶν w θέσεων ἐκλαμβάνουνται ἀπό τόν ὑπολογιστή σάν μηδενικά (δές τήν τιμή τοῦ D στό σχ. 3).

ζ) Ὁ λεγόμενος F-κώδικας χρησιμοποιεῖται προκειμένου νά διαβαστῆ/γραφῆ ἕνας πραγματικός ἀριθμός ὅπως ἔχει (δές σχ. 2). Ἡ γενική μορφή του εἶναι

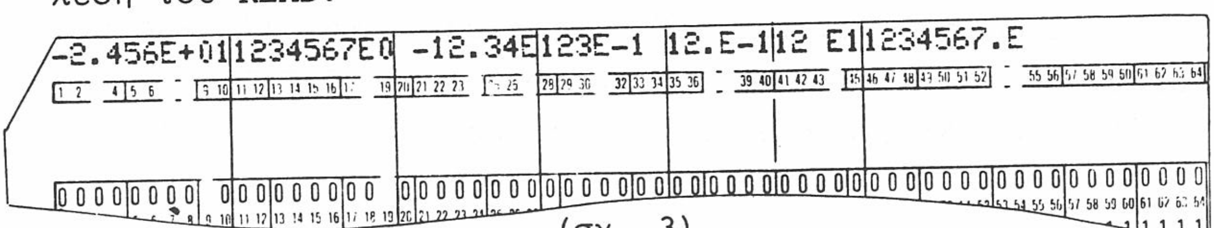
aFw.d

καί σημαίνει γρᾶψε/διάβασε a-τό πλῆθος πραγματικούς ἀριθμούς, πού καταλαμβάνουν w τυπογραφικές θέσεις ὁ καθένας καί ἔχουν d ψηφία μετά τήν ὑποδιαστολή.

η) Ὅταν ἕνας n-ψήφιος ἀριθμός γράφεται μέ τόν Fw.d κώδικα τότε ἐάν n<w οἱ w-n πρῶτες ἐξ ἀριστερῶν ἐκ τῶν w τυπογραφικῶν θέσεων παραμένουν κενές (δές 6.η καί σχ.2).

θ) Ὅταν ἕνας n-ψήφιος ἀριθμός ἔχει d_1-τό πλῆθος ψηφία μετά τήν ὑποδιαστολή καί διαβάζεται μέ τό Fw.d ὅπου n<w, τότε καί ἄν ἀκόμη d_1>d ὁ ἀριθμός διαβάζεται σωστά (δές τίς τιμές τῶν E,F στό σχ. 6).

Ἀκολουθοῦν μερικά παραδείγματα ἀπό κάρτες δεδομένων, ἀντίστοιχες ἐντολές READ μέ τίς ὁποῖες διαβάζονται καθώς καί οἱ τιμές πού δίδονται στίς μεταβλητές μετά τήν ἐκτέλεση τοῦ READ.



(σχ. 3)

```
      READ(5,100) A,B,C,D,E,F,G
  100 FORMAT(E10.3,E9.2,E8.1,E7.0,E6.2,E5.1,E10.5)
```

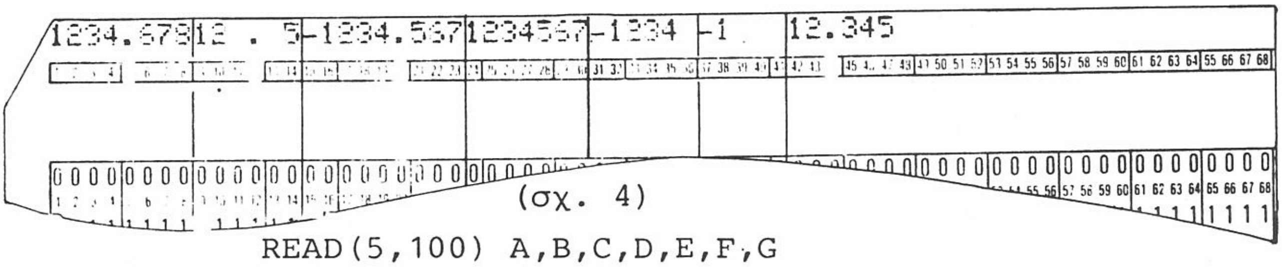
Μετά τήν έκτέλεση τοῦ READ οἱ μεταβλητές ἔχουν τίς ἀκόλουθες τιμές :

A=-24.56 E=1.2

B=12345.67 F=120.00

C=-12.34 G=1234567.00

D=123.00×10^{-10}



(σχ. 4)

```
      READ(5,100) A,B,C,D,E,F,G
  100 FORMAT(F8.3,F6.2,F9.4,F7.0,F6.3,F5.2,F9.8)
```

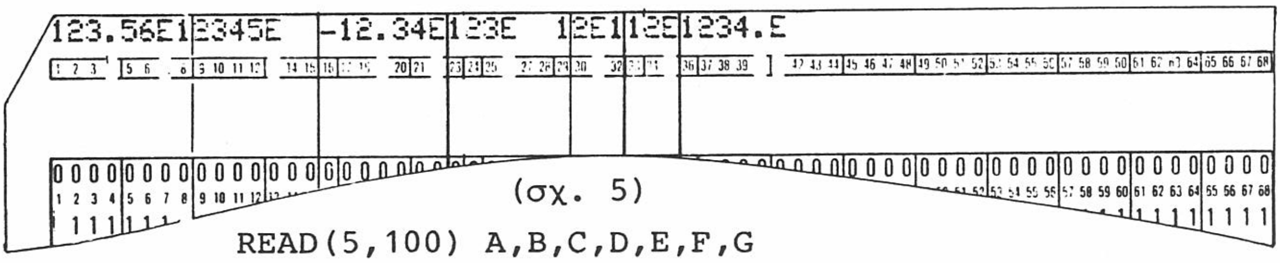
Μετά τήν έκτέλεση τοῦ READ οἱ μεταβλητές ἔχουν τίς ἀκόλουθες τιμές :

A=1234.678 E=-12.34

B=120.05 F=-10.00

C=-1234.567 G=12.345

D=1234567.



(σχ. 5)

```
      READ(5,100) A,B,C,D,E,F,G
  100 FORMAT(E8.2,E7.2,E7.3,E7.0,E3.0,E3.0,E7.4)
```

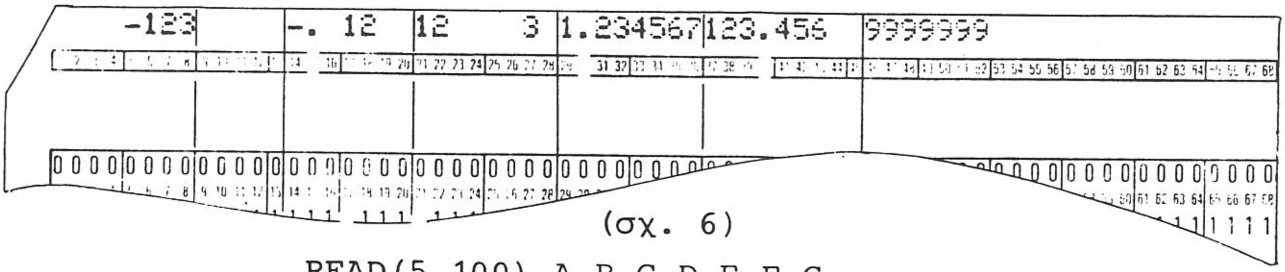
Μετά τήν έκτέλεση τοῦ READ οἱ μεταβλητές ἔχουν τίς τιμές :

A=1235.6 E=20.00

B=23.45 F=12.00

C=-12.34 G=1234.00

D=1230.0



(σχ. 6)

```
      READ(5,100) A,B,C,D,E,F,G
  100 FORMAT(F8.0,F5.2,F7.3,F8.4,F8.2,F9.0,F7.2)
```

Μετά τήν έκτέλεση τοῦ READ οἱ μεταβλητές ἔχουν τίς τιμές :

A=-123.00	E=1.234567
B=0.0	F=123.456
C=-0.012	G=99999.99
D=1200.003	

ι) Ὁ μεγαλύτερος ἀριθμός πού μπορεῖ νά διαβαστῆ μέ τό Fw.d εἶναι ὁ $\underbrace{999...99}_{w-d}.\underbrace{99...9}_{d}$ π.χ. μέ τό F7.2 ὁ μεγαλύτερος ἀριθμός πού μπορεῖ νά διαβασθῆ εἶναι ὁ 99999.99 (δές τήν τιμή τῆς G στό σχ. 6). Ὁ μεγαλύτερος ἀριθμός πού μπορεῖ νά γραφῆ μέ τό Fw.d εἶναι ὁ $\underbrace{99...9}_{w-d-1}.\underbrace{99...9}_{d}$

κ) Λόγω τοῦ περιορισμοῦ τοῦ ι) καί τοῦ ὅτι στά περισσότερα προγράμματα δέν γνωρίζουμε τήν τάξη μεγέθους τῶν ἀποτελεσμάτων σπανίως χρησιμοποιεῖται ὁ F-κώδικας γιά τήν ἐκτύπωση. Ἀντιθέτως πολύ συχνά χρησιμοποιεῖται γιά τήν ἀνάγνωση ἀπό κάρτες δεδομένων (δές σχ. 1,2,4,6).

λ) Ὁ F-κώδικας ἔχει τό προτέρημα νά τυπώνη πολύ εὐανάγνωστα ἀποτελέσματα (δές σχ.2). Τό μειονέκτημα πάλι εἶναι ὅτι δέν μπορεῖ νά τυπώση πολύ μεγάλους καί πολύ μικρούς ἀριθμούς (δές ι). Ὁ G-κώδικας λύνει τό πρόβλημα σέ γενικές γραμμές ὡς ἑξῆς :

1ον) Ἀριθμοί "μέσης τάξεως" τυπώνονται/διαβάζονται μέ τόν F κώδικα.

2ον) Πολύ μικροί καί πολύ μεγάλοι ἀριθμοί τυπώνονται/διαβάζονται μέ τόν E-κώδικα. Πιό ἀναλυτικά :

μ) Ἡ γενική μορφή τοῦ G-κώδικα εἶναι

aGw.d

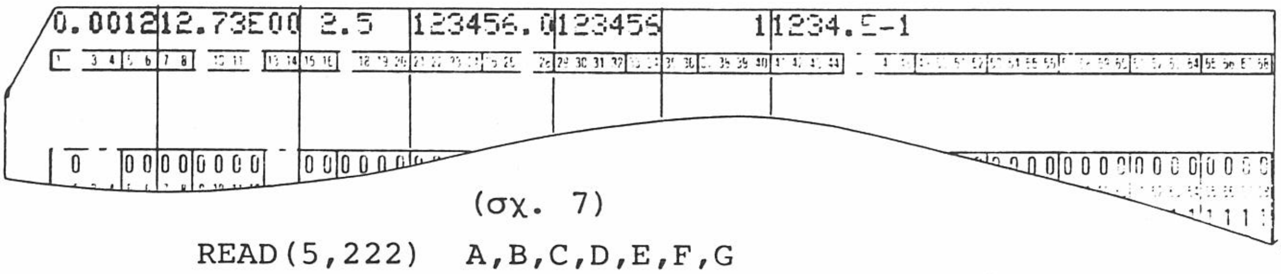
καί σημαίνει διάβασε/γράψε a-τό πλῆθος πραγματικούς ἀριθμούς πού καταλαμβάνουν w τυπογραφικές θέσεις καθένας μέ d ψηφία μετά τήν ὑποδιαστολή, μέ τό ἑξῆς κριτήριο :

1ον) Ἐάν ὁ ἀριθμός στήν γραφή μέ τόν E-κώδικα εἶχε ἐκθέτη p μέ $0 \leq p \leq d$ τύπωσέ/διάβασέ τον μέ τόν F κώδικα στίς w-4 πρῶτες (ἐξ ἀριστερῶν) ἐκ τῶν w τυπογραφικῶν θέσεων, χρησιμοποιῶντας d ψηφία.

2ον) Σ' ὅλες τίς ἄλλες περιπτώσεις τύπωσε/διάβασε μέ τόν E-κώδικα.

ν) Στήν ἐκτύπωση μέ τόν G-κώδικα ἰσχύει ὅπως καί γιά τόν E-κώδικα τό 6.ζ .

Ἀκολουθοῦν μερικά παραδείγματα χρήσεως τοῦ G-κώδικα :



(σχ. 7)

```
    READ(5,222)  A,B,C,D,E,F,G
222 FORMAT(G6.2,G8.3,G6.2,G8.3,G6.2,G6.3,G9.3)
```

Μετά τήν ἐκτέλεση τοῦ READ οἱ μεταβλητές ἔχουν τίς τιμές :

A=0.0012	E=1234.56
B=12.73	F=0.001
C=2.5	$G=1234.00\times10^{-10}$
D=123456.00	

Ὁ ἑπόμενος πίνακας περιέχει τιμές μεταβλητῶν καθώς καί τόν τρόπο μέ τόν ὁποῖο τυπώνονται μέ τόν E καί μέ τόν G κώδικα (b συμβολίζει τό κενό τυπογραφικό διάστημα).

	E11.4	G11.4
123.4	b0.1234E+03	bb123.4bbbb
1234.	b0.1234E+04	bb1234.bbbb
0.12345	b0.1234E 00	b0.1234bbbb
0.01	b0.1000E-01	b0.1000E-01
0.000123	b0.1230E-03	b0.1230E-03

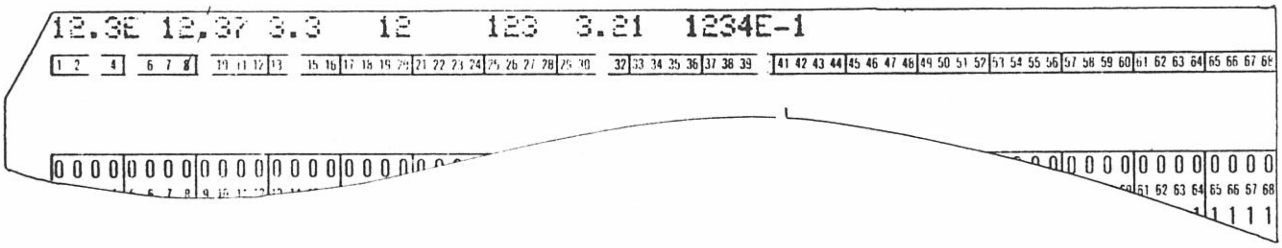
	E11.4	G11.4
0.00012345	b0.1234E-03	b0.1234E-03
-12.345	-0.1235E 02	b-12.35bbbb
-12.3456	-0.1235E 02	b-12.35bbbb
12345.	b0.1235E 05	b0.1235E 05

Ἀσκήσεις

P11.2 Ἐξήγησε τήν λειτουργία τῶν τμημάτων (I) καί (II) τοῦ προγράμματος P11.1 .

P11.3 Πόσες κάρτες δεδομένων χρειάζεται τό P11.1 ; Πῶς πρέπει νά εἶναι τυπωμένες οἱ κάρτες αὐτές ;

P11.4 Πῶς πρέπει νά εἶναι τό FORMAT μέ τό ὁποῖο μποροῦμε νά διαβάσουμε τίς μεταβλητές A,B,C,D,I,K,E,F ἀπό τήν ἑπόμενη κάρτα ; Ὑπάρχουν πολλές δυνατότητες ;



P11.5 Τροποποίησε τό P11.1 ἔτσι ὥστε νά διαβάζη μέ τόν G8.3 κώδικα καί νά τυπώνη μέ τόν G11.3 . Σύγκρινε τά ἀποτελέσματα μέ τό σχ. 2 .

P11.6 Ποιός εἶναι ὁ μικρότερος θετικός ἀριθμός τόν ὁποῖο μποροῦμε νά διαβάσωμε/γράψωμε μέ τό F8.3 ;

P11.7 Ποιός εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀρνητικός ἀριθμός τόν ὁποῖο μποροῦμε νά διαβάσωμε/γράψωμε μέ τό F8.3 ;

P11.8 Ποιός εἶναι ὁ μικρότερος ἀρνητικός ἀριθμός τόν ὁποῖο μποροῦμε νά διαβάσωμε/γράψωμε μέ τό F8.3 ;

P11.9 Γράψε ἕνα πρόγραμμα τό ὁποῖο τυπώνει τό X=12345.67 μέ τό F8.3 καί τό I=-12345 μέ τό I5. Ἐξήγησε τό ἀποτέλεσμα.

P11.10 Γράψε ἕνα πρόγραμμα τό ὁποῖο διαβάζει τούς ἀριθμούς

0.00001	1.2345	123450.
0.00012	12.345	1234500.
0.00123	123.45	12345000.
0.01234	1234.5	123450000.
0.12345	12345.	1234500000.

καί τούς τυπώνει σέ τρεῖς κολῶνες μέ τό F11.4, E11.4 καί G11.4 σέ κάθε κολώνα ἀντιστοίχως.

P11.11 Τροποποίησε τό P2.2 ἔτσι ὥστε νά διαβάζη τά A,B, ἀπό μία κάρτα, ἀναλόγως καί τά P3.1, P3.2 .

P11.12 Τροποποίησε τό P4.2 ἔτσι ὥστε

1ον) νά διαβάζη δύο ἀκεραίους N1,N2

2ον) νά ὑπολογίζη τά τετράγωνα καί κύβους ὅλων

3ον) τῶν φυσικῶν μεταξύ τῶν N1 καί N2.

P11.13 Τροποποίησε τά P6.1 ἀντ. P6.3 ἔτσι ὥστε

1ον) Νά διαβάζουν ἕναν φυσικό N

2ον) Νά λύνουν N φορές τήν ἐξίσωση AX+B=0 ἀντ. $AX^2+BX+C=0$, ὅπου κάθε φορά οἱ συντελεστές νά διαβάζωνται ἀπό μία κάρτα δεδομένων.

P11.14 Ἐπανέλαβε τήν P6.2 μέ τόν G-κώδικα ἀντί τοῦ E .

P11.15 Τροποποίησε τό P9.3 ἔτσι ὥστε

1ον) Νά διαβάζη ἕνα $N \leq 1000$

2ον) Νά διαβάζη ἀπό κάρτες δεδομένων τίς τιμές X(1),...,X(N) καί Y(1),...,Y(N) δύο διανυσμάτων X,Y

3ον) Νά τυπώνη τά X, Y καί τό ἐσωτερικό τους γινόμενο μέ τόν G-κώδικα.

P11.16 Τροποποίησε τό P9.4 ἔτσι ὥστε

1ον) Νά διαβάζη τρεῖς ἀκεραίους N1,N2,N3 μικρότερους ἤ ἴσους τοῦ 10 ἀπό μία κάρτα

2ον) Νά διαβάζη δύο μῆτρες A(N1,N2), B(N2,N3) ἀπό κάρτες δεδομένων, πού περιέχουν μία γραμμή τῆς μήτρας ἤ κάθε μία

3ον) Νά τυπώνη τίς A, B καί C=AB μέ τόν G-κώδικα καί ἔτσι ὥστε κάθε γραμμή τῆς μήτρας νά τυπώνεται σέ μία σειρά.

P11.17 Τροποποίησε τά P10.3 καί P10.12 ἔτσι ὥστε

1ον) Νά διαβάζουν ἕνα $N \leq 1000$ ἀπό μία κάρτα

2ον) Νά διαβάζουν N ἀριθμούς X(1),...,X(N) ἀπό κάρτες δεδομένων

3ον) Νά διατάσσουν τά X(1),...,X(N) καί νά τυπώνουν τά ἀποτελέσματα μέ τόν G-κώδικα.

12

Συναρτήσεις-ἐντολές (=statement functions)

Μέ τήν βοήθεια τῶν συναρτήσεων τῆς FORTRAN SIN, COS, ALOG, κ.τ.λ. πού γνωρίσαμε στήν §7 (δές καί πίνακα 1) μποροῦμε νά ὁρίσουμε καί ἄλλες συναρτήσεις συνθετώτερες μέσω μιᾶς εἰδικῆς ἐντολῆς ἡ ὁποία τίθεται στήν ἀρχή τοῦ προγράμματος. Παράδειγμα τέτοιας συναρτήσεως· εἶναι ἡ F(X)=X-COS(X) τοῦ ἐπομένου προγράμματος.

Ἡ συνάρτηση F(X) εἶναι συνεχής καί ἰσχύει :

$$F(0)=-1<0 \quad \text{καί} \quad F(1)\sim 0.46>0$$

ἄρα θά ὑπάρχει στό διάστημα (0,1) μία ρίζα ξ , $F(\xi)=0$, τῆς F . Τούτη τή ρίζα προσδιορίζουμε διχοτομῶντας τό ἀρχικό διάστημα (0,1) καί παίρνοντας ἐκεῖνο τό ἥμιση (x_α, x_δ) γιά τό ὁποῖο ἰσχύει

$$F(x_\alpha)\cdot F(x_\delta)\leqq 0 \qquad (*)$$

κατόπιν διχοτομοῦμε τό (x_α, x_δ) καί παίρνουμε πάλι ἐκεῖνο τό ἥμιση (x_α, x_δ) γιά τό ὁποῖο ἰσχύει πάλι ἡ (*).

Ἡ διχοτόμηση τοῦ διαστήματος ἐξακολουθεῖ κατ' ἐπανάληψη μέχρις ὅτου τό διάστημα (x_α, x_δ) γίνει μικρότερο δοθέντος ε

$$|x_\delta - x_\alpha|<\varepsilon$$

Ἐαν θεωρήσουμε τό τελευταῖο x_α σάν μία προσέγγιση τῆς ζητουμένης ρίζας ξ τότε εἶναι τό σφᾶλμα τῆς προσέγγισης <ε.

Ἡ μέθοδος προσέγγισης πού περιγράψαμε λέγεται μέθοδος τῆς διχοτομήσεως κατ' ἐπανάληψη καί ἐφαρμόζεται γενικώτερα γιά τήν εὕρεση τῆς ρίζας ξ μιᾶς συναρτήσεως F γιά τήν ὁποία δίδεται ἕνα διάστημα (α,β) στό ὁποῖο ἡ F εἶναι συνεχής καί πληροῖ τήν $F(\alpha)\cdot F(\beta)\leqq 0$.

Πρόγραμμα :

```
C   P12.1   RIZES EXISOSEON, METHODOS EPANALHPTIKHS
C           DIXOTOMHSEOS ARXIKOY DIASTHMATOS
C
      F(X)=X-COS(X)
C
C   DIABASE ARXIKO DIASTHMA (A,B) KAI SFALMA E
      READ(5,100) A,B,E
  100 FORMAT(3F10.4)
      XA=A
      XD=B
C   XA = ARISTERO AKRO TOY DIASTHMATOS
C   XD = DEXIO AKRO  TOY DIASTHMATOS
C   XM = MESO TOY DIASTHMATOS
C
C   DIXOTOMHSH DIASTHMATOS
    1 XM=(XA+XD)*0.5
C
C   STAMATHSE OTAN TO MHKOS TOY (XA,XD) EINAI .LT. E
      IF(XD-XA.LT.E) GO TO 22
C
C   EKLOGH TOY KATALLHLOY YPODIASTHMATOS
      IF(F(XM)*F(XA).GT.0.) GO TO 33
      XD=XM
      GO TO 1                                          (*)
   33 XA=XM
      GO TO 1
C
C   TYPOSE
   22 WRITE(6,200) A,B,E,XA,XM,XD
  200 FORMAT(7H0    A=,1P1E15.7,3H B=,1P1E15.7,
     1        3H E=,1P1E15.7//8H     XA=,1P1E15.7,
     2        4H XM=,1P1E15.7,4H XD=,1P1E15.7)
      STOP
      END
```

(σχ. 1)

Ἀποτελέσματα :

```
A=  0.0000000E-01 B=  5.0000000E 00 E=  1.0000000E-06

XA=  7.3908470E-01 XM=  7.3908510E-01 XD=  7.3908560E-01
```

(σχ. 2)

α) Ἡ πρώτη ἐντολή τοῦ προγράμματος

F(X)=X-COS(X)

εἶναι παράδειγμα μιᾶς "συναρτήσεως-ἐντολῆς". Ἡ γενική μορφή μιᾶς τέτοιας ἐντολῆς εἶναι

$$\underline{\text{ονομα}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \underline{\text{εκφραση}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

π.χ. FRT34(ARA,GH,X1)=ARA+1.-SQRT(ABS(GH))+COS(X1) (**)

<u>ονομα</u> εἶναι τό ὄνομα τῆς συναρτήσεως καί ἀκολουθεῖ τούς κανόνες 1.δ, 1.ε, 3.ζ .

$x_1,\dots,x_n$ εἶναι ὀνόματα μεταβλητῶν, οἱ λεγόμενες "τυπικές μεταβλητές" τῆς συναρτήσεως.

<u>εκφραση</u> εἶναι μία οἱαδήποτε παράσταση (μαθηματικός τύπος) πού περιέχει τίς μεταβλητές $x_1,x_2,\dots,x_n$.

β) Ἡ λειτουργία τῆς συναρτήσεως-ἐντολῆς ἐξηγεῖται βάσει τοῦ προηγουμένου παραδείγματος :

Ἐάν κάπου στό πρόγραμμα π.χ. στήν ἐντολή

IF(FRT34(A,B,C).LT.0.) GO TO 15

ἀπαιτεῖται ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως, τότε ὁ ὑπολογιστής πηγαίνει στήν (**) ἀντικαθιστᾶ τά ARA,GH,X1 μέ τίς τιμές τῶν A,B,C καί ὑπολογίζει τήν τιμή τῆς συναρτήσεως FRT34 βάσει τῆς παραστάσεως στό δεξιό σκέλος τῆς (**).

Ἡ λεγόμενη "ἐπαναληπτική μέθοδος" προσδιορισμοῦ ἑνός σταθεροῦ σημείου ξ μιᾶς συναρτήσεως φ μέ τήν ἰδιότητα

$$\varphi(\xi)=\xi$$

προσεγγίζει τό ξ μέσω μιᾶς ἀκολουθίας ἀριθμῶν πού κατασκευάζεται ὡς ἑξῆς : x_1=δίδεται ἐκ τῶν προτέρων

$x_2=\varphi(x_1)$

$x_3=\varphi(x_2)$ καί ἐν γένει

$x_n=\varphi(x_{n-1})$

Στό ἑπόμενο πρόγραμμα δίδεται ἡ συνάρτηση

$$\varphi(x)=\sqrt[3]{x}+1$$

$x_1=0.5$ καί ζητεῖται ὁ προσδιορισμός μίας λύσεως τῆς ἐξισώσεως

$$\varphi(x)=x$$

μέ τήν ἐπαναληπτική μέθοδο. Ὁ ἀλγόριθμος διακόπτεται ὅταν γιά τά δοθέντα E καί FRAGMA συμβῆ

$$|x_n-x_{n-1}|<E \quad ἤ \quad |x_n-x_{n-1}|>FRAGMA$$

<u>Πρόγραμμα :</u>

```
C   P12.2  EPANALHPTIKH METHODOS (TO POLY 100 BHMATA)
C
      DIMENSION X(100)
      FI(X)=X**(1./3.)+1.
C
```

(σχ. 3)

```
C  DIABASE TO X(1), E, FRAGMA
      READ(5,100) X(1),E,FRAGMA
  100 FORMAT(3G10.3)
      I=1
      WRITE(6,200)  I,X(I),E,FRAGMA
  200 FORMAT(10X,2HX(,I3,2H)=,G14.7,(4H, E=,F10.8,
     *       9H, FRAGMA=,G14.7))
C
C  YPOLOGISE KAI TYPOSE TA X(2),X(3),...
      DO 11 I=2,100
      X(I)=FI(X(I-1))
      WRITE(6,700) I,X(I)
      Y=ABS(X(I)-X(I-1))
      IF(Y.LT.E) GO TO 1
      IF(Y.GT.FRAGMA) GO TO 2
   11 CONTINUE
      WRITE(6,300)
  300 FORMAT(47H0   META 100 BHMATA TO E-KRITHRIO DEN PLHROYTAI   )
      STOP
    1 WRITE(6,400) I
  400 FORMAT(8H0   META,I4,31H BHMATA PLHROYTAI TO E KRITHRIO)
      STOP
    2 J=I-1
      WRITE(6,500) I,I,J
  500 FORMAT(8H0   META,I4,18H  BHMATA TO ABS(X(,I3,
     *       4H)-X(,I3,21H)) XEPERNA TO FRAGMA)
  700 FORMAT(10X,2HX(,I3,2H)=,G14.7)
      STOP
      END
```

(σχ. 3 συνέχεια)

<u>'Αποτελέσματα :</u>

```
    X(  1)= 0.5000000     , E=0.00001000, FRAGMA=  100000.0
    X(  2)=  1.793700
    X(  3)=  2.215019
    X(  4)=  2.303544
    X(  5)=  2.320683
    X(  6)=  2.323951
    X(  7)=  2.324572
    X(  8)=  2.324690
    X(  9)=  2.324712
    X( 10)=  2.324717

META  10 BHMATA PLHROYTAI TO E KRITHRIO
```

(σχ. 4)

γ) Σημείωσε στό P12.2 τήν χρήση τοῦ X σάν τυπικῆς μεταβλητῆς τῆς συναρτήσεως FI(X) καί ταυτόχρονα σάν ὀνόματος τοῦ διανύσματος X(1),...,X(100) . 'Η FORTRAN δέν ἐπιτρέπει τήν χρήση τοῦ ἰδίου ὀνόματος γιά δύο διαφορετικούς σκοπούς ἐντός ἑνός καί τοῦ αὐτοῦ προγράμματος.

Ἡ μόνη ἐξαίρεση εἶναι ὅταν ἕνα ὄνομα χρησιμοποιεῖται σάν ὄνομα μιᾶς τυπικῆς μεταβλητῆς σέ κάποια συνάρτηση. Τό ἴδιο ὄνομα μπορεῖ τότε νά χρησιμοποιηθῆ σάν ὄνομα μιᾶς ἄλλης μεταβλητῆς ἤ διανύσματος ἤ μήτρας κ.τ.λ. σέ ἕνα ἄλλο σημεῖο τοῦ προγράμματος, ἤ σάν ὄνομα τυπικῆς μεταβλητῆς σέ μιά ἄλλη συνάρτηση.

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα κατασκευάζει πίνακες τιμῶν συναρτήσεων μιᾶς μεταβλητῆς. Οἱ πίνακες αὐτοί περιέχουν τό πολύ 5000 τιμές τῆς συναρτήσεως γιά ἰσαπέχοντα σημεῖα X τοῦ διαστήματος (AR,DE) .

Πρόγραμμα :

```
C  P12.3  PINAKAS TIMON SYNARTHSEOS
C
      DIMENSION  X(5000),Y(5000)
      F(X)=A*X+B*X**2+C*ALOG(X**2+1.)+D*TAN(X)+E*SIN(X)+G*X*COS(X)
C
C  GIA NA ORISOYME PLHROS THN SYNARTHSH PREPEI NA DOSOYME
C  TIMES STIS PARAMETROYS A,B,C,D,E,G
      READ(5,100) A,B,C,D,E,G
  100 FORMAT(6G10.0)
C
C  DIABASE TO DIASTHMA  (AR,DE) ,  TO PLHTHOS TON ISAPEXONTON
C  SHMEION = N,  BHMA= TO BHMA ME TO OPOIO AYXANEI TO X
  200 FORMAT(2G10.3,I5)
      READ(5,200) AR,DE,N
      BHMA=(DE-AR)/FLOAT(N-1)
      DO 11 I=1,N
        X(I)=FLOAT(I-1)*BHMA+AR
        Y(I)=F(X(I))
   11 CONTINUE
C
C  TYPOSE TA A,B,C,D,E,G,AR,DE,N
      WRITE(6,300) A,B,C,D,E,G
      WRITE(6,400) AR,DE,N
  300 FORMAT(5X,2HA=,G14.7/5X,2HB=,G14.7/5X,2HC=,G14.7/5X,
     *        2HD=,G14.7/5X,2HE=,G14.7/5X,2HG=,G14.7)
  400 FORMAT(14H0    (AR,DE)=(,G14.7,1H,,G14.7,6H),  N=,I5)
C
C  TYPOSE TON PINAKA : TESSEREIS KOLONES ZEYGON (X,Y),
C  50 GRAMMES SE KATHE SELIDA, ARA 200 ZEYGH ANA SELIDA.
C  M   =OLIKOS ARITHMOS SELIDON PROS EKTYPOSH
      M=(N-1)/200+1
      DO 22 I=1,M
         WRITE(6,500)
C
C  I0 =PLHTHOS ZEYGON POY EXOYN HDH TYPOTHEI
C  I1 =PLHTHOS ZEYGON PROS EKTYPOSH STHN I-SELIDA
C  I2 =PLHTHOS PLHRON STHLON (50 GRAMMES) THS I-SELIDAS
C  I3 =PLHTHOS STOIXEION MH PLHROYS STHLHS STHN I-SELIDA
```

(σχ. 5)

```
          IO=(I-1)*200
          I1=MINO(200,N-IO)
          I2=I1/50
          I3=I1-I2*50
          IF(I3.EQ.0) GO TO 32
C   OI I3 PROTES GRAMMES THS I-SELIDAS
          DO 33 J=1,I3
             J1=IO+J
             J2=J1+I2*50
             WRITE(6,600)  (X(K),Y(K),K=J1,J2,50)
   33     CONTINUE
   32     IF(I2.EQ.0)  STOP
          I3=I3+1
C
C   OI YPOLOIPES GRAMMES THS I SELIDAS
          DO 44 J=I3,50
             J1=IO+J
             J2=J1+(I2-1)*50
             WRITE(6,600)  (X(K),Y(K),K=J1,J2,50)
   44     CONTINUE
   22 CONTINUE
C
  500 FORMAT(1H1,4(10X,1HX,14X,1HY,7X)/)
  600 FORMAT(4(3X,2G15.7))
      STOP
      END
```

(σχ. 5 συνέχεια)

<u>'Αποτελέσματα :</u>

```
A=  1.000000
B= 0.0000000
C= 0.0000000
D= 0.0000000
E=  2.000000
G= -3.000000

(AR,DE)=( 0.0000000    ,  10.00000    ),   N=  101
```

(σχ. 6)

'Ο πίνακας τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως δίδεται στήν ἑπόμενη σελίδα.

δ) 'Η συνάρτηση F(X) τοῦ P12.3 εἶναι ἕνα παράδειγμα συναρτήσεως-ἐντολῆς, ἡ ὁποία περιέχει ὡρισμένες παραμέτρους A,B,C,D,E,G τῶν ὁποίων οἱ τιμές καθορίζονται στό πρόγραμμα πού ἀκολουθεῖ.

ε) 'Η συνάρτηση J=MINO(N1,N2) πού χρησιμοποιήσαμε στό

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
0.0000000	0.0000000	4.999977	-1.172467	9.999949	34.08482		
0.9999996E-01	0.1165623E-02	5.099977	-2.534369				
0.1999999	0.9298742E-02	5.199976	-3.875450				
0.2999999	0.3123748E-01	5.299975	-5.178770				
0.3999999	0.7356453E-01	5.399975	-6.427244				
0.4999998	0.1424770	5.499974	-7.603828				
0.5999998	0.2436800	5.599974	-8.691757				
0.6999997	0.3822670	5.699973	-9.674706				
0.7999997	0.5626154	5.799973	-10.53703				
0.8999997	0.7883062	5.899972	-11.26393				
0.9999996	1.062035	5.999971	-11.84174				
1.099999	1.385546	6.099971	-12.25803				
1.199999	1.759585	6.199970	-12.50179				
1.299998	2.183864	6.299970	-12.56370				
1.399998	2.657025	6.399969	-12.43612				
1.499997	3.176657	6.499969	-12.11333				
1.599997	3.739284	6.599968	-11.59171				
1.699996	4.340410	6.699967	-10.86967				
1.799995	4.974555	6.799967	-9.947796				
1.899995	5.635315	6.899966	-8.829028				
1.999994	6.315435	6.999966	-7.516453				
2.099994	7.006904	7.099965	-6.023449				
2.199993	7.701052	7.199965	-4.353668				
2.299993	8.388663	7.299964	-2.520909				
2.399992	9.060107	7.399963	-0.5390854				
2.499991	9.705466	7.499963	1.575901				
2.599991	10.31468	7.599962	3.806255				
2.699990	10.87769	7.699962	6.132493				
2.799990	11.38459	7.799961	8.533585				
2.899989	11.82579	7.899961	10.98716				
2.999989	12.19213	7.999960	13.46972				
3.099988	12.47509	8.099959	15.95689				
3.199987	12.66686	8.199959	18.42365				
3.299987	12.76055	8.299958	20.84462				
3.399986	12.75027	8.399958	23.19427				
3.499986	12.63125	8.499957	25.44733				
3.599985	12.39999	8.599957	27.57886				
3.699985	12.05430	8.699956	29.56476				
3.799984	11.59340	8.799955	31.38190				
3.899983	11.01798	8.899955	33.00845				
3.999983	10.33025	8.999954	34.42413				
4.099982	9.533931	9.099954	35.61047				
4.199982	8.634308	9.199953	36.55106				
4.299981	7.638174	9.299953	37.23172				
4.399981	6.553808	9.399952	37.64073				
4.499980	5.390923	9.499951	37.76907				
4.599979	4.160582	9.599951	37.61049				
4.699979	2.875111	9.699950	37.16158				
4.799978	1.547979	9.799950	36.42200				
4.899978	0.1936634	9.899949	35.39447				

7

(σχ. 6 συνέχεια)

πρόγραμμα εἶναι συνάρτηση τῆς FORTRAN (δές πίνακα 1) καί δίδει στό J τήν τιμή τοῦ ἐλαχίστου ἐκ τῶν N1,N2 .

Ἀσκήσεις

P12.4 Ἐξήγησε τήν λειτουργία τοῦ τμήματος (*) τοῦ προγράμματος P12.1 . Ἐξήγησε τόν τρόπο μέ τόν ὁποῖο τυπώνονται τά ἀποτελέσματα τοῦ ἰδίου προγράμματος.

P12.5 Τί πρέπει νά ἀλλάξουμε στό πρόγραμμα P12.1 γιά νά ὑπολογίσουμε μία ρίζα τοῦ πολυωνύμου $x^3-2.5x-6$ στό διάστημα (0,5).

P12.6 Τροποποίησε τό P12.1 ἔτσι ὥστε

1ον) νά διαβάζη τά A,B,A1,A2,A3,A4 ἀπό μία κάρτα δεδομένων

2ον) νά ὑπολογίζη καί νά τυπώνη μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως $A1x^3+A2x^2+A3x+A4=0$ πού εὑρίσκεται στό διάστημα (A,B) .

P12.7 Πῶς μποροῦμε νά βροῦμε τήν τρίτη ρίζα ἑνός ἀριθμοῦ χρησιμοποιῶντας τό P12.6 ;

P12.8 Ἐπιτρέπεται στό P12.1 νά ἀλλάξωμε τό ὄνομα τῆς συναρτήσεως F(X)=X-COS(X) μέ τό MI(X)=X-COS(X) ;
Τί πρέπει νά ἀλλάξωμε ἐπί πλέον στό πρόγραμμα ;

P12.9 Μποροῦμε νά βροῦμε τήν τετραγωνική ρίζα ἑνός θετικοῦ ἀριθμοῦ χρησιμοποιῶντας τό P12.1 ;

P12.10 Γιά ποιές συναρτήσεις δέν μπορεῖ νά ἐφαρμοσθῆ ἡ μέθοδος τοῦ P12.1 ;

P12.11 Βρές μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως TAN(X)-2·X=0 στό διάστημα (0.1,1.567) .

P12.12 Τροποποίησε τό P12.1 ἔτσι ὥστε μετά τήν ἀνάγνωση τοῦ ἀρχικοῦ διαστήματος (A,B) νά ἐξετάζη ἄν ἰσχύη F(A)*F(B)<0 καί ἄν ναί, νά προχωρῆ στόν ὑπολογισμό τῆς ρίζας, ἄν ὄχι νά σταματᾶ τυπώνοντας σχετικό σχόλιο.

P12.13 Μέ τήν βοήθεια τοῦ P12.1 προσδιόρισε μία ρίζα ξ τῆς ἐξισώσεως $x^5-10x-1=0$ μέ (A,B)=(1,2) καί E, FRAGMA τά ἴδια μέ τοῦ P12.1. Ὁμοίως στό ἴδιο διάστημα τήν ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x^x+2x-6=0$, καθώς καί τῆς $x^7-x-1=0$.

P12.14 Χρησιμοποιῶντας τήν P12.12 προσδιόρισε τίς ρίζες τῶν ἐξισώσεων $\ln(x)=x^{-1}$ καί $4x-7\sin(x)=0$ μέ (A,B)=(1,2) καί E, FRAGMA τά ἴδια μέ τοῦ P12.1.

P12.15 Τί σχέση ἔχει ἡ λύση τῆς ἐξισώσεως $x^3-x-1=0$ στό διάστημα (1,1.5) μέ τό σταθερό σημεῖο $\xi \sim 2.32471$ τῆς $\varphi(x)=\sqrt[3]{x}+1$ πού προσδιορίσαμε στό P12.2 ;

P12.16 Προσπάθησε νά ὑπολογίσης μέ τό P12.2 τή ρίζα τοῦ $x^3-x-1=0$ στό διάστημα (1,1.5) .

P12.17 Πῶς μποροῦμε νά προσδιορίσωμε τήν ρίζα τῆς $x^{2n+1}-x-1=0$ στό διάστημα (1,1.5) γιά n=1,2,3,... χρησιμοποιῶντας τό P12.2 ;

P12.18 Χρησιμοποιῶντας τήν P12.3 κατασκεύασε τόν πίνακα τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως $y=\ln(x)$ στό διάστημα (1,1001) γιά 1001 ἰσαπέχοντα σημεῖα .

P12.19 Χρησιμοποιῶντας τήν P12.3 κατασκεύασε τόν πίνακα τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως F(X)=X*X/X στό διάστημα (1,11) γιά 1001 ἰσαπέχοντα σημεῖα .

P12.20 Πόσων συναρτήσεων μποροῦμε νά κατασκευάσωμε τόν πίνακα μέ τό P12.3 ἐάν ἐπιτρέπουμε στά A,B,C,D,E,G νά παίρνουν μόνον τίς τιμές 0 καί 1 .

P12.21 Ἐξήγησε τόν τρόπο μέ τόν ὁποῖο τυπώνεται ὁ πίνακας στό P12.3 , ἰδιαιτέρως τήν σημασία τῶν I0,I1,I2,I3 καθώς καί τήν λειτουργία τῶν 33- καί 44-DO-κύκλων.

*P12.22 Θά μπορούσαμε νά γράψωμε τό P12.3 χωρίς νά χρησιμοποιήσωμε τά διανύσματα X(5000), Y(5000) ;

P12.23 Ἡ λεγόμενη "μέθοδος τοῦ Newton" γιά τόν προσδιορισμό τῆς ρίζας ξ τῆς ἐξισώσεως $f(x)=0$, π.χ. $3x-e^x=0$, στηρίζεται στήν ἐπαναληπτική μέθοδο (P12.2). Συγκεκριμένα ἐφαρμόζεται ἡ ἐπαναληπτική μέθοδος στήν συνάρτηση

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

ὅπου $f'(x)$ ἡ παράγωγος τῆς $f(x)$. Ἐάν ξ εἶναι σταθερό σημεῖο τῆς φ τότε

$$\xi=\varphi(\xi)=\xi-\frac{f(\xi)}{f'(\xi)} \quad \text{ἄρα} \quad f(\xi)=0 \quad .$$

Στό παράδειγμά μας $f'(x)=3-e^x$ ἄρα $\varphi(x)=x-\dfrac{3x-e^x}{3-e^x}$

Προσδιόρισε μέ τήν μέθοδο τοῦ Newton μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως

1ον)	$x^3-x-1=0$, X(1)=1.32,	$E=10^{-6}$,	$FRAGMA=10^6$
2ον)	$x^3+x-1001=0$, X(1)=10.,	"	"
3ον)	$x^2+4\sin(x)=0$, X(1)=2.,	"	"
4ον)	$x^2-\cos(x)=0$, X(1)=0.5	"	"
5ον)	$x\tan(x)-1.28=0$, X(1)=0.25	"	"
6ον)	$2x-\log(x)-7=0$, X(1)=10.	"	"
7ον)	$e^x+e^{-3x}-4=0$, X(1)=0.5	"	"

P12.24 Βάσει τῆς μεθόδου τοῦ Newton δέν εἶναι δύσκολο νά ἀποδειχθῆ, ὅτι δοθέντος A>0 ἡ ἀκολουθία

$$X(1)=A$$

$$X(2)=\frac{1}{2}\left(X(1)+\frac{A}{X(1)}\right) \quad \text{καί ἐν γένει}$$

$$X(N+1)=\frac{1}{2}\left(X(N)+\frac{A}{X(N)}\right)$$

συγκλίνει πρός τήν $\sqrt{A}$.

Ὑπολόγισε μέ τήν μέθοδο αὐτή, βάσει τοῦ P12.2 τίς τετραγωνικές ρίζες τῶν ἀριθμῶν 2,3,5,7,9,10,16,100 μέ σφάλμα $E=10^{-6}$, $FRAGMA=10^6$.

P12.25 Μιά γενίκευση τῆς P12.24 δίδει ἡ ἑξῆς ἀκολουθία

$$X(1)=A>0$$

$$X(2)=X(1)-\frac{X(1)^{K}-A}{K\cdot X(1)^{K-1}} \quad \text{καί ἐν γένει}$$

$$X(N+1)=X(N)-\frac{X(N)^{K}-A}{K\cdot X(N)^{K-1}}$$

ὅπου $K>1$ φυσικός ἀριθμός.

Ἡ ἀκολουθία αὐτή συγκλίνει πρός τήν K-στή ρίζα τοῦ A, $\sqrt[K]{A}$.

Ὑπολόγισε μέ τήν μέθοδο αὐτήν καί τήν βοήθεια τοῦ P12.2 τήν 3-η, 4-η, 5-η καί 6-η ρίζα τοῦ 2 μέ σφάλμα $E=10^{-6}$, $FRAGMA=10^{6}$.

P12.26 Ἡ ἀκολουθία τῶν ἀριθμῶν

$$X(1)=C$$

$$X(2)=X(1)(2-A\cdot X(1)) \quad \text{μέ} \quad A>0 \quad \text{καί ἐν γένει}$$

$$X(N+1)=X(N)(2-A\cdot X(N))$$

συγκλίνει πρός τόν ἀριθμό $\frac{1}{A}$ ὅταν διαλέξουμε C πού νά πληροῖ $0<C<\frac{2}{A}$.

Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο δοθέντος τοῦ A εὑρίσκει ἕνα C τό ὁποῖο πληροῖ τήν παραπάνω ἀνισότητα καί μέ τήν βοήθεια τῆς παραπάνω ἀκολουθίας καί τοῦ P12.2 προσδιορίζει τόν ἀντίστροφο $\frac{1}{A}$ τοῦ A, χρησιμοποίησε τά E, FRAGMA τοῦ P12.2 .

P12.27 Μέ τήν βοήθεια τοῦ P12.3 μπορεῖ κανείς νά ἐξετάση τήν συμπεριφορά μιᾶς ἀκολουθίας π.χ.

$$a_n=\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

τυπώνοντας π.χ. τούς πρώτους 200 ὅρους τῆς ἀκολουθίας.

Ἄν ἀπό ἕνα ὡρισμένο a_n καί πέρα οἱ ἀριθμοί πού τυπώνονται εἶναι ἴσοι μεταξύ τους καί μέ τόν ἀριθμό A , τότε εἶναι πιθανόν τό A νά προσεγγίζη τό ὅριο τῆς ἀκολουθίας.

Ἐξέτασε μέ τόν τρόπο αὐτό τήν συμπεριφορά τῶν ἀκολουθιῶν

$a_n=n^{-1}$, $a_n=\ln(n)/n$, $a_n=\sqrt[n]{n}$, $a_n=\cos(n)$,

$a_n=n(e^{1/n}-1)$, $a_n=\left(\frac{\cos(n)}{\cos(2n)}\right)^{1/n^2}$, $a_n=\frac{\ln(e^n+1)}{n}$

$a_n=n\cdot\ln(\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{n}))$.

P12.28 Τό P12.3 μπορεῖ ἐπίσης νά χρησιμοποιηθῆ γιά τόν προσδιορισμό τῆς ρίζας ξ μιᾶς ἐξισώσεως f(x)=0 . Κατ' ἀρχήν κατασκευάζουμε ἕνα πίνακα τιμῶν τῆς f σ' ἕνα διάστημα (α,β) ὅπου ὑποθέτουμε τήν ὕπαρξη μιᾶς ρίζας. 'Από τόν πίνακα τιμῶν εὑρίσκομε μία πρώτη προσέγγιση τῆς ρίζας τήν ὁποία χρησιμοποιοῦμε σάν ἀρχική τιμή X(1) τῆς μεθόδου τοῦ Newton (δές P12.23). Προσδιόρισε μέ τόν τρόπο αὐτό μερικές ἀπό τίς ρίζες τῶν ἐξισώσεων

1ον) $e^{x}-2+x=0$

2ον) $x\tan(x)-1=0$

3ον) $\tan(x)-x^{2}\cos(x)=0$

13

<u>Μεταβλητές καί συναρτήσεις τῶν τύπων</u>

<u>DOUBLE PRECISION (=διπλῆς ἀκριβείας)</u>

<u>COMPLEX (=μιγαδικός)</u>

<u>LOGICAL (=λογικός)</u>

Ἡ ἀκρίβεια μέ τήν ὁποία ὑπολογίζει ἐσωτερικά ὁ ὑπολογιστής χρησιμοποιῶντας ἀριθμούς τοῦ τύπου REAL εἶναι περιορισμένη. Μία ἀκριβέστερη εἰκόνα δίδει τό ἑπόμενο πρόγραμμα τό ὁποῖο διαβάζει ἀπό τίς 40 πρῶτες στῆλες μιᾶς κάρτας δεδομένων τόν ἀριθμό
0.123456789012345678901234567890

<u>Πρόγραμμα :</u>

```
C  P13.1   ESOTERIKH AKRIBEIA TOY YPOLOGISTH
C          GIA REAL METABLHTES
C
      READ(5,100) A
      A=A*10.
      WRITE(6,200) A
  100 FORMAT(E40.30)
  200 FORMAT(1H0,E40.30)
      STOP
      END
```

(σχ. 1)

<u>Ἀποτελέσματα :</u>

```
0.123456700000000000000000000000E 01
```

α) Κάθε ὑπολογιστής ἐκτελεῖ ἐσωτερικά τίς πράξεις μέ ἀριθμούς γράφοντάς τους ὡς πρός μία βάση B (δές P9.2) ὑπό μορφήν

$$\alpha = \pm\left(\frac{\alpha_1}{B} + \frac{\alpha_2}{B^2} + \frac{\alpha_3}{B^3} + \ldots + \frac{\alpha_\nu}{B^\nu}\right)\times B^e \qquad (*)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu$ εἶναι τά ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ α ὡς πρός τήν βάση B γιά τά ὁποῖα ἰσχύει $0 \leqq \alpha_i \leqq B-1$. e λέγεται ὁ ἐκθέτης τοῦ ἀριθμοῦ καί κανονίζεται ἔτσι ὥστε τό α_1 νά εἶναι πάντα $\alpha_1 \neq 0$ (ἐφ' ὅσον $\alpha \neq 0$).

Γιά κάθε ὑπολογιστή τό B τό ν καθώς καί τά ὅρια στά ὁποῖα μεταβάλλεται τό e καθορίζονται ἀπό τόν κατασκευαστή του καί ἀναγράφονται στίς ὁδηγίες χρήσεως τοῦ ὑπολογιστῆ.

Τό ν εἶναι τό πλῆθος τῶν ψηφίων (ὡς πρός βάση B) μέ τό ὁποῖο ὑπολογίζει ἐσωτερικά ὁ ὑπολογιστής. Ἐάν ἕνας REAL ἀριθμός ἔχει περισσότερα ἀπό ν ψηφία τότε στρογγυλεύεται, σύμφωνα μέ ὁρισμένους κανόνες πού διαφέρουν ἀπό ὑπολογιστή σέ ὑπολογιστή.

Οἱ παραπάνω περιορισμοί ἔχουν δύο συνέπειες :

1ον) Ὁ ὑπολογιστής συγκρατεῖ μόνο ἕνα ὁρισμένο πλῆθος ψηφίων ἑνός REAL ἀριθμοῦ (δες P13.1).

2ον) Λόγω τῆς μετατροπῆς στό σύστημα μέ βάση B καί τοῦ 1ον) ὑπεισέρχονται σφάλματα στίς πράξεις μέ REAL ἀριθμούς.

Ἔτσι λ.χ. γιά τόν IBM-370 εἶναι

$B=16$

$\nu=6$

$-65<e<63$

β) Γιά ὑπολογισμούς μέ μεγαλύτερη ἀκρίβεια χρησιμοποιοῦμε στήν FORTRAN μεταβλητές τοῦ τύπου DOUBLE PRECISION. Τοῦτες παριστοῦν πάλι πραγματικούς ἀριθμούς τούς ὁποίους φέρνει ὁ ὑπολογιστής στήν κανονική μορφή (*), μέ τή διαφορά ὅτι τώρα χρησιμοποιεῖ ἕνα μεγαλύτερο ν. Ἔτσι λ.χ. ὁ IBM-370 χρησιμοποιεῖ γιά τούς DOUBLE PRECISION ἀριθμούς ν=14 . Τά ἀποτελέσματα τῆς χρήσεως ἀριθμῶν τοῦ τύπου DOUBLE PRECISION εἶναι δύο :

1ον) Ὁ ὑπολογιστής συγκρατεῖ περισσότερα ψηφία ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.

2ον) Λόγω τοῦ 1ον) ἡ ἀκρίβεια τῶν πράξεων εἶναι μεγαλύτερη.

Πρόγραμμα :

```
C  P13.2  SYGRISH TOY REAL KAI DOUBLE PRECISION TYPOY
C
      DOUBLE PRECISION  Y
      READ(5,100) X,Y
  100 FORMAT(E40.30,D40.30)
      X=X*10.
      Y=Y*10.D0
C
      WRITE(6,100) X, Y
      STOP
      END
```

(σχ. 2)

'Αποτελέσματα :

0.12345670000000000000000000000E 01 0.12345678901234550000000000000D 01

Τά X καί Y πού διαβάζονται άπό μία κάρτα δεδομένων ίσοῦνται καί τά δύο μέ τόν άριθμό
0.123456789012345678901234567890

γ) Ἡ πρώτη έντολή τοῦ προγράμματος P13.2 καθορίζει ὅτι ἡ μεταβλητή Y εἶναι τοῦ τύπου DOUBLE PRECISION .
Τέτοιοι άριθμοί διαβάζονται καί γράφονται μέ τόν D-κώδικα ἡ γενική μορφή τοῦ ὁποίου εἶναι

aDw.d

ἡ δέ λειτουργία του, εἶναι άκριβῶς ἡ ἴδια μέ τήν τοῦ E-κώδικα, προκύπτει δέ άπό τά 6.ε - 6.η δι' άντικαταστάσεως τοῦ γράμματος E μέ τό D .
'Αναλόγως ἑρμηνεύεται άπ' τό 6.ν καί ὁ κώδικας

nPaDw.d

δ) Πράξεις μεταξύ REAL καί DOUBLE PRECISION άριθμῶν έπιτρέπονται στήν FORTRAN, τό άποτέλεσμα καί οἱ ένδιάμεσοι ὑπολογισμοί δίδονται πάλι μέ DOUBLE PRECISION.

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα προσεγγίζει τό μῆκος τῆς περιφερείας ἑνός κύκλου (άκτίνος 1) μέ τήν βοήθεια έγγεγραμμένων καί περιγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων, τά ὁποῖα προκύπτουν μέσω κατ' έπανάληψην διπλασιασμοῦ τοῦ πλήθους τῶν πλευρῶν των. 'Αρχίζουμε μέ τό περιγεγραμμένο άντ. έγγεγραμμένο τετράγωνο πλευρᾶς =2, άντ. πλευρᾶς $=\sqrt{2}$. Γιά περισσότερη άκρίβεια χρησιμοποιοῦμε DOUBLE PRECISION άριθμούς.
'Εάν p_n άντ. q_n συμβολίζει τήν περίμετρο (ἤ ἡμιπερίμε-

τρο) τοῦ ἐγγεγραμμένου ἀντ. περιγεγραμμένου κανονικοῦ n-γώνου τότε γιά τό κανονικό 2n-γωνο ἰσχύουν οἱ ἐπαγωγικοί τύποι

$$q_{2n}=\frac{2p_nq_n}{p_n+q_n}\quad,\quad p_{2n}=\sqrt{p_nq_{2n}}\ .$$

Πρόγραμμα :

```
C   P13.3   YPOLOGISMOS TOY PI KAT ARXIMHDH
C
C   PESO = HMIPERIMETROS TOY EGGEGRAMMENOY POLYGONOY
C   PEXO = HMIPERIMETROS TOY PERIGEGRAMMENOY POLYGONOY
C   NPLEYR = PLHTHOS PLEYRON TOY POLYGONOY
C   E = AKRIBEIA THS PROSEGGISHS
          DOUBLE PRECISION  PESO,PEXO,E
          E=1.D-16
          NPLEYR=4
          PESO=2.DO*DSQRT(2.DO)
          PEXO = 4.DO
C   EPIKEFALIDA
          WRITE(6,100)
  100 FORMAT(1HO,5X,17HARITHMOS PLEYRON ,14H HMIPERIMETROS
     1         ,47H EGGEGRAMMENOY    HMIPERIMETROS PERIGEGRAMMENOY/)
          WRITE(6,200) NPLEYR, PESO, PEXO
  200 FORMAT(1H ,8X,I10,4X,1P2D28.18)
C
C   DIPLASIASMOS TON PLEYRON, YPOLOGISMOS TON NEON PESO, PEXO
   33 NPLEYR = NPLEYR*2
          PEXO = (2.*PESO*PEXO)/(PESO+PEXO)
          PESO = DSQRT(PESO*PEXO)
          WRITE(6,200) NPLEYR, PESO, PEXO
C
C   TO PROGRAMMA STAMATA OTAN OI PERIMETROI TOY EGGEGRAMMENOY
C   KAI PERIGEGRAMMENOY DIAFEROYN LIGOTERO APO 1.D-16
          IF (PEXO-PESO.LT.E) STOP
          GO TO 33
          END
```

(σχ. 3)

Ἀποτελέσματα :

Δές σχ. 4 στήν ἑπόμενη σελίδα.

ε) Ἡ συνάρτηση DSQRT(X) τῆς FORTRAN πού χρησιμοποιεῖται στό πρόγραμμα εἶναι ἡ συνάρτηση SQRT(X) τροποποιημένη ἔτσι ὥστε νά ὑπολογίζη μέ DOUBLE PRECISION ἀριθμούς. Στόν πίνακα 1 περιέχονται καί οἱ ὑπόλοιπες συναρτήσεις τῆς FORTRAN οἱ ὁποῖες ὑπολογίζουν μέ DOUBLE PRECISION ἀριθμούς. Τά ὀνόματα τῶν περισσοτέρων ἐξ' αὐτῶν τῶν συναρτήσεων προκύπτουν μέσω προσθήκης ἑνός D στό ὄνομα τῆς ἀντιστοίχου συναρτήσεως γιά REAL μεταβλητές π.χ.

ARITHMOS PLEYRON	HMIPERIMETROS EGGEGRAMMENOY	HMIPERIMETROS PERIGEGRAMMENOY
4	2.828427124746190000D 00	4.000000000000000000D 00
8	3.061467458920718000D 00	3.313708498984760000D 00
16	3.121445152258052000D 00	3.182597878074527000D 00
32	3.136548490545938000D 00	3.151724907429255000D 00
64	3.140331156954752000D 00	3.144118385245903000D 00
128	3.141277250932771000D 00	3.142223629942455000D 00
256	3.141513801144299000D 00	3.141750369168964000D 00
512	3.141572940367089000D 00	3.141632080703179000D 00
1024	3.141587725277157000D 00	3.141602510256806000D 00
2048	3.141591421511197000D 00	3.141595117749586000D 00
4096	3.141592345570115000D 00	3.141593269629304000D 00
8192	3.141592576584869000D 00	3.141592807599641000D 00
16384	3.141592634338559000D 00	3.141592692092250000D 00
32768	3.141592648776982000D 00	3.141592663215404000D 00
65536	3.141592652386587000D 00	3.141592655996192000D 00
131072	3.141592653288988000D 00	3.141592654191389000D 00
262144	3.141592653514588000D 00	3.141592653740188000D 00
524288	3.141592653570988000D 00	3.141592653627388000D 00
1048576	3.141592653585088000D 00	3.141592653599187000D 00
2097152	3.141592653588612000D 00	3.141592653592137000D 00
4194304	3.141592653589493000D 00	3.141592653590374000D 00
8388608	3.141592653589713000D 00	3.141592653589933000D 00
16777216	3.141592653589768000D 00	3.141592653589823000D 00
33554432	3.141592653589781000D 00	3.141592653589795000D 00
67108864	3.141592653589784000D 00	3.141592653589788000D 00
134217728	3.141592653589785000D 00	3.141592653589786000D 00
268435456	3.141592653589785000D 00	3.141592653589785000D 00

(σχ. 4)

REAL X	DOUBLE PRECISION X
SIN(X)	DSIN(X)
COS(X)	DCOS(X)
EXP(X)	DEXP(X)
ABS(X)	DABS(X)
ALOG(X)	DLOG(X)
SQRT(X)	DSQRT(X)

κ.ο.κ.

ζ) DOUBLE PRECISION σταθερές γράφονται μέ προσθήκη τοῦ γράμματος D καί ἐκθέτη π.χ.

REAL	DOUBLE PRECISION
1.	1.D0
10.	10.D0
1.E-6	1.D-6
0.12345	0.12345D0

(δές καί τίς πρῶτες ἐντολές τοῦ P13.3).

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα δίδει ἕνα παράδειγμα χρήσεως μιγαδικῶν ἀριθμῶν στήν FORTRAN . Τό πρόγραμμα λύνει τήν δευτεροβάθμιο ἐξίσωση $ax^2+bx+c=0$ μέ μιγαδικούς a, b, c .

Πρόγραμμα :

```
C   P13.4  DEYTEROBATHMIOS EXISOSH ME MIGADIKOYS SYNTELESTES
C
C   DIDONTAI OI SYNTLESTES A, B,C
        COMPLEX  A, B, C, X1,X2,D
        A=(1.,0.)
        B=(2.,1.)
        C=(1.,1.)
        IF(CABS(A).EQ.0.) GO TO 11
C
C   D = DIAKRINOYSA TOY POLYONYMOY
        D=CSQRT(B**2-4.*A*C)
C   OTAN A .NE. 0
        X1=(-B+ D)/2./A
        X2=(-B-D)/2./A
        WRITE(6,200) A, B, C, X1, X2
        GO TO 33
     11 IF (CABS(B).EQ.0.) GO TO 22
C
C   OTAN A = 0, B .NE. 0
        X1=C/B
        WRITE(6,200) A, B, C, X1
        GO TO 33
C
```

(σχ. 5)

```
C  OTAN A=B=0
   22 WRITE(6,200) A, B, C
   33 STOP
  200 FORMAT( 1H0,5X,2HA=,2E15.7//6X,2HB=,2E15.7//6X,2HC=,
     1        2E15.7//5X,3HX1=,2E15.7//5X,3HX2=,2E15.7)
      END
```

(σχ. 5 συνέχεια)

<u>'Αποτελέσματα :</u>

```
 A=  0.1000000E 01  0.0000000E 00

 B=  0.2000000E 01  0.1000000E 01

 C=  0.1000000E 01  0.1000000E 01

X1= -0.1000000E 01  0.0000000E 00

X2= -0.1000000E 01 -0.1000000E 01
```

(σχ. 6)

η) Ἡ ἐντολή COMPLEX A,B,C,X1,X2,D

καθορίζει ὅτι οἱ μεταβλητές μέ ὀνόματα A, B, κ.τ.λ. παριστοῦν μιγαδικούς (=COMPLEX) ἀριθμούς. Μιγαδικοί ἀριθμοί γράφονται στήν FORTRAN ὑπό μορφήν ζευγῶν π.χ. (2.,3.), (1.456,0.956), (0.,1.) κ.τ.λ.

θ) Οἱ ἀριθμητικές πράξεις +, *, -, /, καί ἡ ὕψωση μιγαδικοῦ σέ <u>ἀκεραία</u> δύναμη n ἐπιτρέπονται στήν FORTRAN . Ἐπί πλέον ἐπιτρέπεται πολλαπλασιασμός μιγαδικοῦ π.χ. (3.1,2.5) μέ πραγματικό ἀριθμό π.χ. 2.3

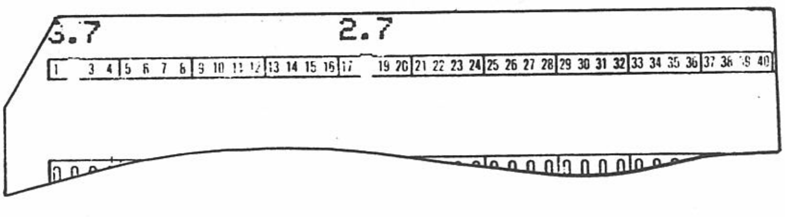
A=2.3*(3.1,2.5)

Μετά τήν ἐκτέλεση τῆς ἐντολῆς αὐτῆς ἡ τιμή τοῦ A εἶναι (7.13,5.75) (δές 3.β).

ι) CSQRT(X) εἶναι μία μιγαδική συνάρτηση τῆς FORTRAN Ἄλλες μιγαδικές συναρτήσεις τῆς FORTRAN εἶναι ἡ CSIN(X) (μιγαδικό ἡμίτονο), ἡ CCOS(X) (μιγαδικό συνημίτονο), ἡ CEXP(X) (μιγαδική ἐκθετική). Ὁ πλήρης κατάλογος τῶν μιγαδικῶν συναρτήσεων τῆς FORTRAN δίδεται στόν πίνακα 1.

κ) Μιγαδικοί ἀριθμοί διαβάζονται καί γράφονται σάν νά ἐπρόκειτο γιά δύο REAL ἀριθμούς π.χ. οἱ ἐντολές

```
      COMPLEX Z
      READ(5,100) Z
  100 FORMAT(2F16.7)
```



καί ἡ κάρτα δεδομένων

ἐφοδιάζουν τή μιγαδική μεταβλητή Z μέ τήν τιμή (3.7,2.7) (δές καί τό 200 FORMAT τοῦ P13.4) .

Γιά μιγαδικούς ἀριθμούς τῆς μορφῆς Z=(cos(φ),sin(φ)) ἰσχύει ὁ λεγόμενος τύπος τοῦ de Moivre

$$Z = (\cos(\varphi),\sin(\varphi))^n = (\cos(n\varphi),\sin(n\varphi)) \quad (**)$$

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα διαβάζει ἕνα φ καί ἕνα n καί εὑρίσκει μέ τήν βοήθεια τοῦ (**) τό cos(nφ) καί sin(nφ) .

<u>Πρόγραμμα :</u>

```
C   P13.5   O TYPOS TOY DE MOIVRE
C
        COMPLEX  Z, ZN
        READ(5,100) FI, N
C
C   ORISMOS THS Z=(COS(FI),SIN(FI))
        X=COS(FI)
        Y=SIN(FI)
C
        Z=CMPLX(X,Y)
C
C   EYRESH TON COS(N*FI), SIN(N*FI)
        ZN=Z**N
        COSNF=REAL(ZN)
        SINNF=AIMAG(ZN)
C
        WRITE(6,200) FI, X, Y, N, COSNF,SINNF
C
        WRITE(6,200) FI, Z, N, ZN
  100   FORMAT(1E16.7,I4)
  200   FORMAT(1H ,5X,3HFI=,E14.7,3H Z=,2E15.7,3H N=,I4/
     1        5X,4H ZN=,2E15.7)
        STOP
        END
```

(σχ. 7)

<u>Ἀποτελέσματα :</u>

```
FI= 0.5000000E 00 Z=  0.8775826E 00  0.4794255E 00 N=    9
ZN= -0.2107961E 00 -0.9775297E 00
FI= 0.5000000E 00 Z=  0.8775826E 00  0.4794255E 00 N=    9
ZN= -0.2107961E 00 -0.9775297E 00
```

(σχ. 8)

λ) CMPLX(X,Y) εἶναι ἡ συνάρτηση τῆς FORTRAN ἡ ὁποία γιά δύο πραγματικούς x,y π.χ. 10.3, 72.31 κατασκευάζει τόν μιγαδικό (x,y) (ἐδῶ (10.3,72.31)).

REAL(Z) ἀντιστοιχεῖ στόν μιγαδικό Z=(x,y) τό πραγματικό μέρος τοῦ x

AIMAG(Z) ἀντιστοιχεῖ στόν μιγαδικό Z=(x,y) τό φανταστικό μέρος του

Έτσι λ.χ. REAL((3.5,2.6))=3.5, AIMAG((3.5,2.6))=2.6

Ένας ακόμη τύπος μεταβλητών πού περιέχει ή FORTRAN είναι οἱ λογικές (=LOGICAL) μεταβλητές οἱ ὁποῖες μποροῦν νά λάβουν δύο τιμές .TRUE. (=ἀληθής) καί .FALSE. (=ψευδής). Τέτοιες μεταβλητές ὑπεισέρχονται συχνᾶ στά προγράμματα π.χ. τό περιεχόμενο τῶν παρενθέσεων ἑνός IF μπορεῖ νά θεωρηθῆ σάν μία λογική μεταβλητή (δές 4.θ, 4.κ, 5.β, 5.γ). Μεταξύ τῶν μεταβλητῶν αὐτῶν ὁρίζονται οἱ πράξεις .AND. .OR. καί .NOT. .

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα εὑρίσκει τούς φυσικούς ἀριθμούς n τῶν ὁποίων τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως μέ τό 3 εἶναι 1 (MOD(N,3)=1) καί τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ n^2 μέ τό 11 εἶναι 5 (MOD(N^2,11)=5).

Τό πρόγραμμα χρησιμοποιεῖ τό διάνυσμα τῶν λογικῶν μεταβλητῶν C(10000). Στό C(I) δίδεται ἡ τιμή .TRUE. ἐάν γιά τόν ἀκέραιο I ἀληθεύουν οἱ δύο συνθῆκες παραπάνω. Ἄλλως παίρνει τό C(I) τήν τιμή .FALSE. . Τό πρόγραμμα τυπώνει στό τέλος τά ζεύγη (I,C(I)) .

<u>Πρόγραμμα :</u>

```
C   P13.6  LOGIKES METABLHTES
C
      LOGICAL   A,B,C,DEN
      DIMENSION     C(10000)
      DEN=.TRUE.
C
C   ME TON 11-DO KYKLO EFODIASOME TO C(10000) ME TIMES
      DO 11 N=1,10000
      A=MOD(N,3).EQ.1
      B=MOD(N*N,11).EQ.5
      C(N)=A.AND.B
      IF(.NOT.C(N)) GO TO 11
C
C   EAN GIA OLA TA N TO C(N) DEN ALHTHEYEI TOTE H EPOMENH
C   ENTOLH DEN THA EKTELESTH POTE
      DEN=.FALSE.
   11 CONTINUE
      IF(DEN) GO TO 22
      WRITE(6,100) (I,C(I),I=1,10000)
  100 FORMAT(5(3H  (,I5,1H,,L1,1H)))
      STOP
   22 WRITE(6,200)
  200 FORMAT(30H  DEN YPARXEI TETOIOS ARITHMOS)
      STOP
      END
```

(σχ. 9)

<u>'Αποτελέσματα :</u>

(1,F)	(2,F)	(3,F)	(4,T)	(5,F)
(6,F)	(7,T)	(8,F)	(9,F)	(10,F)
(11,F)	(12,F)	(13,F)	(14,F)	(15,F)
(16,F)	(17,F)	(18,F)	(19,F)	(20,F)
(21,F)	(22,F)	(23,F)	(24,F)	(25,F)
(26,F)	(27,F)	(28,F)	(29,F)	(30,F)
(31,F)	(32,F)	(33,F)	(34,F)	(35,F)
(36,F)	(37,T)	(38,F)	(39,F)	(40,T)
(41,F)	(42,F)	(43,F)	(44,F)	(45,F)
(46,F)	(47,F)	(48,F)	(49,F)	(50,F)
(51,F)	(52,F)	(53,F)	(54,F)	(55,F)
(56,F)	(57,F)	(58,F)	(59,F)	(60,F)
(61,F)	(62,F)	(63,F)	(64,F)	(65,F)
(66,F)	(67,F)	(68,F)	(69,F)	(70,T)
(71,F)	(72,F)	(73,T)	(74,F)	(75,F)
(76,F)	(77,F)	(78,F)	(79,F)	(80,F)
(81,F)	(82,F)	(83,F)	(84,F)	(85,F)
(86,F)	(87,F)	(88,F)	(89,F)	(90,F)
(91,F)	(92,F)	(93,F)	(94,F)	(95,F)
(96,F)	(97,F)	(98,F)	(99,F)	(100,F)
(101,F)	(102,F)	(103,T)	(104,F)	(105,F)
(106,T)	(107,F)	(108,F)	(109,F)	(110,F)
(111,F)	(112,F)	(113,F)	(114,F)	(115,F)
(116,F)	(117,F)	(118,F)	(119,F)	(120,F)
(121,F)	(122,F)	(123,F)	(124,F)	(125,F)
(126,F)	(127,F)	(128,F)	(129,F)	(130,F)
(131,F)	(132,F)	(133,F)	(134,F)	(135,F)
(136,T)	(137,F)	(138,F)	(139,T)	(140,F)
(141,F)	(142,F)	(143,F)	(144,F)	(145,F)
(146,F)	(147,F)	(148,F)	(149,F)	(150,F)
(151,F)	(152,F)	(153,F)	(154,F)	(155,F)
(156,F)	(157,F)	(158,F)	(159,F)	(160,F)
(161,F)	(162,F)	(163,F)	(164,F)	(165,F)
(166,F)	(167,F)	(168,F)	(169,T)	(170,F)
(171,F)	(172,T)	(173,F)	(174,F)	(175,F)
(176,F)	(177,F)	(178,F)	(179,F)	(180,F)
(181,F)	(182,F)	(183,F)	(184,F)	(185,F)
(186,F)	(187,F)	(188,F)	(189,F)	(190,F)
...		...	...	...

(σχ. 10)

μ) 'Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οἱ ἐντολές τοῦ 11-DO-κύκλου οἱ ὁποῖες ἐφοδιάζουν τό C(I) μέ τήν κατάλληλη τιμή (.TRUE. ἤ .FALSE.) γιά I=1,2,...,10000 . Ὅπως ἐσημειώσαμε καί στό 5.γ παραστάσεις τῆς μορφῆς E.EQ.F ἤ E.GT.F κ.τ.λ. ὅπου E,F καί τά δύο ἀκέραιοι ἤ καί τά δύο πραγματικοί, παίρνουν πάντα μία ἀπό τίς τιμές .TRUE. ἤ .FALSE. Μέ τήν ἐντολή G =E.EQ.F δίδεται στήν λογική μεταβλητή G ἡ τιμή τῆς παραστάσεως E.EQ.F .

ν) Μεταξύ τῶν λογικῶν μεταβλητῶν A,B ὁρίζονται στήν FORTRAN οἱ τρεῖς πράξεις .AND. , .OR. καί .NOT.
Οἱ τιμές τοῦ C=A.AND.B ἀντ. C=A.OR.B ἀντ. C=.NOT.A ὑπολογίζονται βάσει τῶν τιμῶν τῶν A καί B μέσω τῶν ἑπομένων πινάκων :

	A.AND.B	B: .TRUE.	B: .FALSE.
A	.TRUE.	.TRUE.	.FALSE.
A	.FALSE.	.FALSE.	.FALSE.

	A.OR.B	B: .TRUE.	B: .FALSE.
A	.TRUE.	.TRUE.	.TRUE.
A	.FALSE.	.TRUE.	.FALSE.

A	.TRUE.	.FALSE.
.NOT.A	.FALSE.	.TRUE.

ξ) Λογικές μεταβλητές γράφουμε καί διαβάζουμε μέ τόν L-κώδικα, ἡ γενική μορφή τοῦ ὁποίου εἶναι

aLw

καί σημαίνει διάβασε/τύπωσε a-τό πλῆθος λογικές μεταβλητές πού καταλαμβάνουν w τυπογραφικά διαστήματα ἡ κάθε μία. Ἡ τιμή τῆς λογικῆς μεταβλητῆς πού διαβάζεται/γράφεται εἶναι ἕνα γράμμα T (γιά τό .TRUE.) ἤ F (γιά τό .FALSE.) τά ὑπόλοιπα w-1 τυπογραφικά διαστήματα παραμένουν κενά. Ἔτσι λ.χ. ἐάν οἱ τιμές τῶν λογικῶν μεταβλητῶν X,Y,Z εἶναι ἀντιστοίχως .TRUE. , .TRUE. , .FALSE. τότε τυπώνονται μέ τίς ἑπόμενες ἐντολές :

```
      WRITE(6,100) X,Y,Z
  100 FORMAT(L3,2X,L4,3X,L6)
```

bbTbbbbbTbbbbbbbbF

(Τό b συμβολίζει τό κενό τυπογραφικό διάστημα).

ο) Συνοπτικά διαθέτει ἡ FORTRAN τούς ἑξῆς 5 τύπους μεταβλητῶν :

REAL
INTEGER
DOUBLE PRECISION
COMPLEX
LOGICAL

Γιά τούς δύο πρώτους τύπους χρησιμοποιοῦμε συνήθως ὀνόματα πού ἀκολουθοῦν τόν κανόνα 3.ζ .

π) Ἡ FORTRAN ἐπιτρέπει τήν χρήση συναρτήσεων-ἐντολῶν οἱ ὁποῖες παίρνουν τιμές ἑνός ἐκ τῶν 5 τύπων πού ἀναφέραμε. Γιά μία τέτοια συνάρτηση πρέπει στήν ἀρχή τοῦ προγράμματος νά καθορίσωμε τόν τύπο της , π.χ.

```
LOGICAL  APEIK
COMPLEX  Z,SYNART
APEIK(N)=(N**2+1).GT.153
SYNART(Z)=1./Z**2
```

Ἀσκήσεις

P13.7 Ἔστω ὅτι ὁ ὑπολογιστής χρησιμοποιεῖ B=16, ν=6 (δές 13.α), 1ον) Πῶς παρίστανται ὡς πρός τή βάση αὐτή οἱ ἀριθμοί 1., 0.1, 0.2 (δές P9.20).
2ον) Ἀφοῦ προσδιορίσεις τήν παράσταση τοῦ 0.1 για B=16, ν=6, ὑπολόγισε τήν τιμή τῆς παραστάσεως στό δεκαδικό σύστημα.
3ον) Ποιός εἶναι ὁ ἑπόμενος ἀριθμός τοῦ 1. ὁ ὁποῖος παρίσταται χωρίς νά στρογγυλεύεται ;

P13.8 Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο προσθέτει
0.1+0.1+...+0.1 (10 φορές),
καί τυπώνει τό ἀποτέλεσμα μέ τόν E20.10 κώδικα. Ἐξήγησε τό ἀποτέλεσμα.

P13.9 Τά ἴδια ἐρωτηματικά μέ τοῦ P13.7 γιά B=16, ν=14 .

P13.10 Τροποποίησε τό P13.3, ἔτσι ὥστε νά ὑπολογίζη μέ REAL ἀριθμούς καί νά σταματᾶ ὅταν τό NPLEYR>2^{31}-1 .

P13.11 Ἐπανέλαβε τό P7.1 μέ DOUBLE PRECISION ἀριθμούς.

P13.12 Τροποποίησε τά P12.1 - P12.3 ἔτσι ὥστε νά λειτουργοῦν μέ DOUBLE PRECISION ἀριθμούς.

P13.13 Ἐπανέλαβε τήν P12.23 μέ DOUBLE PRECISION ἀριθμούς.

P13.14 Ἡ μέθοδος "regula falsi" προσεγγίζει τήν ρίζα ξ μιᾶς ἐξισώσεως $f(x)=0$ μέσω μιᾶς ἀκολουθίας ἀριθμῶν x_n ἡ ὁποία κατασκευάζεται ὡς ἐξῆς :

x_1=δίδεται ἐκ τῶν προτέρων

x_2= " " " "

$$x_3=x_2-\frac{x_2-x_1}{f(x_2)-f(x_1)}\cdot f(x_2) \quad \text{καί ἐν γένει}$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}\cdot f(x_n)$$

Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο λειτουργεῖ μέ DOUBLE PRECISION ἀριθμούς καί τό ὁποῖο γιά δοθεῖσα συνάρτηση $f(x)$ καί x_1, x_2 ὑπολογίζει καί τυπώνει τούς πρώτους 100 ὅρους τῆς παραπάνω ἀκολουθίας . Τό πρόγραμμα θέλουμε νά σταματᾶ ὅταν συμβῆ $|f(x_n)|<\varepsilon$ ἤ $|f(x_n)-f(x_{n-1})|<d$ ἤ $|f(x_n)-f(x_{n-1})|>M$. Σέ κάθε περίπτωση θέλομε νά τυπώνεται σχετικό σχόλιο. Τά ε, d καί M δίδονται στό πρόγραμμα μέ μιά κάρτα δεδομένων.

P13.15 Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο

1ον) Διαβάζει ἀπό μία κάρτα δεδομένων μία γωνία φ καί ἕναν ἀκέραιο ν.

2ον) Προσδιορίζει παρόμοια μέ τό P13.5 τά ἀθροίσματα CN=cos(φ)+cos(2φ)+...+cos(νφ)

SN=sin(φ)+sin(2φ)+...+sin(νφ)

3ον) Τυπώνει τά φ, ν, CN καί SN .

P13.16 Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο διαβάζει 80 μονοψήφιους ἀριθμούς ἀπό μία κάρτα καί δίδει σέ μία λογική μεταβλητή A τήν τιμή .TRUE. ὅταν ἀνάμεσα στούς ἀριθμούς αὐτούς περιέχεται περισσότερες ἀπό 9 φορές ἡ 1, ἄλλως δίδει στό A τήν τιμή .FALSE. .

*P13.17 Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο δοθέντος n εὑρίσκει τίς (μιγαδικές) ρίζες τῆς ἐξισώσεως $x^n-1=0$. Συμπλήρωσε κατόπιν τό πρόγραμμα ἔτσι ὥστε νά προσδιορίζη τίς ρίζες τῆς ἐξισώσεως $x^n-a=0$, ὅπου a μιγαδικός ἀριθμός.

P13.18 Κατασκεύασε μία λογική (LOGICAL) συνάρτηση-έντολή δύο πραγματικῶν μεταβλητῶν X,Y , ἡ ὁποία παίρνει τήν τιμή .TRUE. ὅταν $r<X^2+Y^2<R$ ἄλλως παίρνει τήν τιμή .FALSE.

14

<u>Συναρτήσεις-ὑποπρογράμματα</u>

<u>(=function subprograms)</u>

Συχνά σέ διάφορες ἐφαρμογές χρειάζεται νά ὑπολογίσουμε τήν τιμή f(x) μιᾶς συναρτήσεως ἡ ὁποία δέν δίδεται μέ κάποιο ἑνιαῖο τύπο γιά ὅλα τά x π.χ.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{γιά } x\geqq 1 \\ x^2 & \text{γιά } |x|<1 \\ -x-\ln(-x) & \text{γιά } x\leqq -1 \end{cases}$$

Προφανῶς μία τέτοια συνάρτηση δέν μπορεῖ νά ὁρισθῆ σέ ἕνα πρόγραμμα μέ μία καί μόνο συνάρτηση-ἐντολή. Ὁ καθορισμός τῆς τιμῆς τοῦ f(x) γιά δοθέν x ἀπαιτεῖ μιά ὁλόκληρη διαδικασία κατά τήν ὁποία ἐξετάζεται ἡ θέση τοῦ x ὡς πρός τό διάστημα (-1,1). Τέτοιες (ἀλλά καί πιό πολύπλοκες ὅπως θά δοῦμε ἀργότερα) συναρτήσεις προγραμματίζονται στήν FORTRAN ὑπό μορφήν ἀνεξαρτήτων αὐτοτελῶν προγραμμάτων πού τοποθετοῦνται μετά τό κύριο πρόγραμμα καί λέγονται ὑποπρογράμματα .

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα ὑπολογίζει τήν τιμή τῆς συναρτήσεως f πού δίδεται παραπάνω γιά 101 ἰσαπέχοντα σημεῖα τοῦ διαστήματος (-5,5).

Πρόγραμμα :

```
C  P14.1   SYNARTHSEIS YPOPROGRAMMATA, PARADEIGMA
C
      DIMENSION  X(101),Y(101)
      DO 11 I=1,101
      X(I)=-5.+FLOAT(I-1)*0.1
      Y(I)=F(X(I))
      WRITE(6,100)  I, X(I),Y(I)
   11 CONTINUE
  100 FORMAT(1H ,5X,I4,1P2E16.7)
      STOP
      END
      REAL FUNCTION F(X)
      IF (ABS(X).GT.1.) GO TO 33
      F=X*X
      RETURN
   33 IF(X.LT.0.) GO TO 44                    (*)
      F=1./X
      RETURN
   44 F=-X-ALOG(-X)
      RETURN
      END
```

(σχ. 1)

Ἀποτελέσματα :

```
   1  -5.0000000E 00   3.3905630E 00
   2  -4.8999990E 00   3.3107650E 00
            ...              ...
  49  -1.9999880E-01   3.9999540E-02
  50  -9.9999420E-02   9.9998820E-03
  51   9.5367430E-07   9.0949470E-13
  52   1.0000030E-01   1.0000070E-02
            ...              ...
 100   4.9000010E 00   2.0408150E-01
 101   5.0000010E 00   1.9999980E-01
```

(σχ. 2)

α) Τό (*) μέρος τοῦ προγράμματος λέγεται συνάρτηση-ὑποπρόγραμμα (=function subprogram) ἀποτελεῖ δέ ἕνα αὐτοτελές πρόγραμμα τό ὁποῖο χρησιμοποιεῖται ἀπό τό "κύριο" πρόγραμμα ὁσάκις χρειασθῆ ἡ τιμή τῆς F γιά δοθέν x .

β) Οἱ ἐντολές ἑνός ὑποπρογράμματος περικλείονται μεταξύ τῆς πρώτης ἐντολῆς τοῦ ὑποπρογράμματος πού ἔχει τήν γενική μορφή

<u>τυπος</u> FUNCTION <u>ονομα</u>$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

καί τοῦ END τοῦ ὑποπρογράμματος.

<u>τυπος</u> εἶναι μία ἀπ' τίς λέξεις REAL, INTEGER, COMPLEX, DOUBLE PRECISION καί LOGICAL .

<u>ονομα</u> εἶναι τό ὄνομα τῆς συναρτήσεως καί ἀκολουθεῖ τούς

κανόνες 1.δ καί 1.ε.
$x_1, x_2, \ldots, x_n$ εἶναι οἱ λεγόμενες τυπικές μεταβλητές τῆς συναρτήσεως καί ἀκολουθοῦν τόν κανόνα 12.γ (δές καί 12.α).
γ) Ἡ λειτουργία τοῦ ὑποπρογράμματος ἔχει ὡς ἑξῆς:
Ἐάν κάπου στό πρόγραμμα χρειασθῆ ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως F γιά δοθέν X τότε "πηδᾶ" ὁ ὑπολογιστής στό ὑποπρόγραμμα, ὑπολογίζει μ' αὐτό τήν τιμή τῆς F καί "ἐπιστρέφει" στό κύριο πρόγραμμα στό σημεῖο ἀκριβῶς πού τό ἐγκατέλειψε. Ἡ ἐπιστροφή ἀπό τό ὑποπρόγραμμα στό κύριο πρόγραμμα γίνεται μέσω τῆς ἐντολῆς RETURN (=γύρνα πίσω).

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα δίδει ἕνα παράδειγμα μιᾶς ἀκόμη πιό πολύπλοκης συναρτήσεως μ τῆς ὁποίας ἡ τιμή καθορίζεται μέ σφάλμα $\varepsilon=10^{-5}$ κατόπιν ἐκτελέσεως ἑνός ὁλόκληρου ἀλγορίθμου.
Συγκεκριμένα ἡ συνάρτηση $\mu(a,b,\varepsilon)$ ὑπολογίζεται δοθέντων τῶν $a>0$, $b>0$ καί $\varepsilon>0$ ὡς ἑξῆς:
Κατασκευάζονται οἱ δύο ἀκολουθίες

$$a_1=a \qquad b_1=b$$
$$a_2=\sqrt{a_1b_1} \qquad b_2=(a_1+b_1)/2$$
$$a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n} \qquad b_{n+1}=(a_n+b_n)/2$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι οἱ δύο ἀκολουθίες αὐτές συγκλίνουν πρός τό αὐτό ὅριο A

$$A= \lim a_n = \lim b_n$$

Τό A λέγεται ἀριθμητικογεωμετρικός μέσος τῶν a, b .
Τό ὑποπρόγραμμα ὑπολογίζει τούς ὅρους τῶν ἀκολουθιῶν μέχρις ὅτου συμβεῖ $|a_n-b_n|<\varepsilon$ καί παίρνει $\mu(a,b,\varepsilon)=a_n$

<u>Πρόγραμμα :</u>

```
C  P14.2   SYNARTHSEIS TON OPOION H TIMH EYRISKETAI ME TH
C       BOHTHIA ALGORITHMOY
C
      REAL  MI
      EPS=1.E-5
      A=10.
      B=100.
      Y=MI(A,B,EPS)
      WRITE(6,100) A,B,Y
  100 FORMAT(6H0  MI(,G13.5,1H,,G13.5,2H)=,G13.5)
      STOP
      END
```

(σχ. 3)

```
      REAL FUNCTION MI(A,B,E)
      AR=(A+B)*0.5
      GE=SQRT(A*B)
   11 H=AR
      AR=(AR+GE)*0.5
      GE=SQRT(H*GE)
      IF(ABS(AR-GE).GT.E)  GO TO 11
      MI=AR
      RETURN
      END
```

(σχ. 3 συνέχεια)

<u>'Αποτελέσματα :</u>

```
MI(   10.000     ,    100.00     )=    42.504
```

δ) Οἱ τυπικές μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ἑνός ὑποπρογράμματος εἶναι δυνατόν νά εἶναι ὀνόματα μεταβλητῶν μέ δεῖκτες.

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα δίδει ἕνα παράδειγμα τέτοιας συναρτήσεως ὑποπρογράμματος τῆς ὁποίας ἡ μία ἐκ τῶν μεταβλητῶν (MITRA) παριστᾶ μιά μεταβλητή μέ δύο δεῖκτες . 'Η συνάρτηση IXNOS ὑπολογίζει γιά δοθεῖσα μήτρα A(10,10) τό ἄθροισμα τῶν διαγωνίων στοιχείων της

A(1,1)+A(2,2)+...+A(10,10)

<u>Πρόγραμμα :</u>

```
C  P14.3    TO IXNOS MIAS MHTRAS
C
      REAL IXNOS
      DIMENSION A(10,10)
      READ(5,100)  ((A(I,J),J=1,10),I=1,10)
  100 FORMAT(10G8.0)
      T=IXNOS(A,10)
      WRITE(6,200)  ((A(I,J),J=1,10),I=1,10)
  200 FORMAT(3H   ,  10F6.2)
      WRITE(6,200) T
      STOP
      END

      REAL FUNCTION IXNOS(MITRA,DIASTA)
      REAL MITRA
      INTEGER DIASTA
      DIMENSION   MITRA(DIASTA,DIASTA)
      IXNOS=0.
      DO 11 I=1,DIASTA
   11 IXNOS = IXNOS+MITRA(I,I)
      RETURN
      END
```

(σχ. 4)

'Αποτελέσματα :

```
 0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00
 0.10  2.53  6.20-20.30  3.24-23.20 -5.50  0.00  0.10  0.12
 0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00
 0.10  2.53  6.20-20.30  3.24-23.20 -5.50  0.00  0.10  0.12
 0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00
 0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00
 0.10  2.53  6.20-20.30  3.24-23.20 -5.50  0.00  0.10  0.12
 0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00
 0.10  2.53  6.20-20.30  3.24-23.20 -5.50  0.00  0.10  0.12
 0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00
-23.17
```

(σχ. 5)

ε) 'Ενδιαφέρον ἐδῶ εἶναι καί ὁ τρόπος μέ τόν ὁποῖο διαβάζεται καί γράφεται ἡ μήτρα. Οἱ ἐντολές READ(5,100) καί WRITE(6,200) περιέχουν κιβωτισμό ἀποτελούμενο ἀπό δύο πεπλεγμένα DO . Ἕνας κιβωτισμός πεπλεγμένων DO-κύκλων λειτουργεῖ ὅπως καί ἕνας κιβωτισμός συνήθων DO-κύκλων (δές σχετικά στό 9.θ,9.ι,9.κ).

ζ) Σέ ἕνα "κύριο" πρόγραμμα δέν ἐπιτρέπονται μεταβλητές διαστάσεις. Σέ ἕνα ὑποπρόγραμμα ἐπιτρέπονται. Ἔτσι λ.χ. στά προγράμματα πού ἐξετάσαμε μέχρι τώρα ἡ ἐντολή DIMENSION εἶχε πάντα τήν μορφή

DIMENSION A(100),B(13),X(5)...κ.τ.λ.

DIMENSION XI(32),YPSIL(75), RO(32,45) ...κ.τ.λ

Πάντοτε δηλαδή οἱ διαστάσεις ἐντός τῶν παρενθέσεων ἦταν σταθεροί ἀριθμοί. Ἡ ἐντολή

DIMENSION MITRA(DIASTA,DIASTA)

στό ὑποπρόγραμμα τοῦ P13.3 ὑποδεικνύει ὅτι σέ ἕνα ὑποπρόγραμμα οἱ διαστάσεις ἐντός τῶν παρενθέσεων μπορεῖ νά εἶναι μεταβλητές (πάντως τοῦ τύπου INTEGER). Τοῦτος ὁ κανόνας ἰσχύει ἐν γένει γιά ὅλα τά ὑποπρογράμματα. Ὁ μόνος περιορισμός εἶναι ὁ ἑξῆς :

η) Σέ κάθε τυπική μεταβλητή μέ δεῖκτες, ἑνός ὑποπρογράμματος πρέπει νά ἀντιστοιχῆ μιά μεταβλητή μέ δεῖκτες στό κύριο πρόγραμμα. Οἱ διαστάσεις μιᾶς τυπικῆς μεταβλητῆς τοῦ ὑποπρογράμματος πρέπει νά εἶναι μικρότερες ἤ ἴσες τῶν διαστάσεων τῆς ἀντιστοίχου μεταβλητῆς τοῦ κυρίου προγράμματος.

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα πού ὑπολογίζει τό ἐσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων (δές καί τό P9.3) μέχρι 100 διαστάσεων δίδει ἕνα παράδειγμα ἐφαρμογῆς τῶν κανόνων ζ καί η .

Πρόγραμμα :

```
C   P14.4  ESOTERIKO GINOMENO DIANYSMATON MEXRI TO POLY
C          100 DIASTASEON
C
      DIMENSION    A(100), B(100)
C
C   DIABASE THN DIASTASH = N TON DIANYSMATON A, B
      READ(5,100)  N
 100  FORMAT(I4)
C
C   DIABASE TA A(1),...,A(N), B(1),...,B(N) KAI TYPOSE TA
      READ(5,200) (A(I),I=1,N)
      WRITE(6,300) (A(I),I=1,N)
      READ(5,200) (B(I),I=1,N)
      WRITE(6,300) (B(I),I=1,N)
  200 FORMAT(10G8.0)
  300 FORMAT(1H0, 4G15.7 )
C
C   YPOLOGISE TO ESOTERIKO GINOMENO KAI TYPOSE TO
      E=ESOGIN(A,B,N)
      WRITE(6,300) E
      STOP
      END
      REAL FUNCTION ESOGIN(X,Y,NDIM)
      DIMENSION X(NDIM),Y(NDIM)
C   YPOLOGISMOS TOY ESOTERIKOY GINOMENOY
      ESOGIN=0.
      DO 100 I=1,NDIM
      ESOGIN=ESOGIN+X(I)*Y(I)
  100 CONTINUE
      RETURN
      END
```

(σχ. 6)

Ἀποτελέσματα :

```
 1234500.        3.003000      -23000.00        3563.230

 123456.0

0.2345000E-02    5.555500      -3.000030        0.5600000

 6.993500

 937297.1
```

θ) Στίς μεταβλητές X,Y τοῦ ὑποπρογράμματος (τυπικές μεταβλητές τοῦ ὑποπρογράμματος) μέ διαστάσεις NDIM, ἀντιστοιχοῦν οἱ μεταβλητές A καί B τοῦ κυρίου προγράμματος μέ διάσταση 100 . Τό NDIM δέν ἐπιτρέπεται νά πάρη τιμές μεγαλύτερες τοῦ 100 .

ι) Παρατήρησε ὅτι ἡ μάρκα 100 τοῦ CONTINUE τοῦ ὑποπρογράμματος ὑπεισέρχεται καί στό κύριο πρόγραμμα. Τοῦτο ἐπιτρέπεται διότι ὁ ὑπολογιστής θεωρεῖ τό κύριο- καί τό ὑπό-πρόγραμμα σάν δύο ἀνεξάρτητα προγράμματα , ἐπομένως μᾶρκες καί ὀνόματα μεταβλητῶν πού ὑπεισέρχονται στό ἕνα πρόγραμμα μποροῦν νά ἐμφανίζονται καί στό ἄλλο χωρίς κίνδυνο συγχύσεως.

κ) Ἡ χρήση ὑποπρογραμμάτων συνεισφέρει στά ἑξῆς δύο βασικά προσόντα ἑνός προγράμματος :

1ον) Κάνει τό πρόγραμμα πιό εὐανάγνωστο.

2ον) Κάνει τό πρόγραμμα πιό εὐπροσάρμοστο.

Ἔτσι λ.χ. ἐνῶ τά προγράμματα P9.3 καί P14.4 κάνουν κατ' οὐσίαν τήν ἴδια δουλειά, τό μέν πρῶτο ὑπολογίζει τό ἐσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων 6 διαστάσεων καί μόνον ἐνῶ τό δεύτερο ὑπολογίζει τό ἐσωτερικό γινόμενο γιά διανύσματα οἱασδήποτε διαστάσεως ≤ 100 .

Ἀσκήσεις

P14.5 Τροποποίησε τά P14.1 καί P14.2 ἔτσι ὥστε νά λειτουργοῦν μέ DOUBLE PRECISION ἀριθμούς.

P14.6 Κατασκεύασε συνάρτηση ὑποπρόγραμμα ἡ ὁποία δοθείσης τῆς μήτρας $A = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix}$

εὑρίσκει τήν ὀρίζουσα τῆς μήτρας OR :

$$OR=(\alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\alpha_{3,3})+(\alpha_{1,2}\alpha_{2,3}\alpha_{3,1})+(\alpha_{1,3}\alpha_{2,1}\alpha_{3,2})-$$
$$-(\alpha_{3,1}\alpha_{2,2}\alpha_{1,3})-(\alpha_{3,2}\alpha_{2,3}\alpha_{1,1})-(\alpha_{2,1}\alpha_{1,2}\alpha_{3,3})$$

P14.7 Βάσει τοῦ P5.1 κατασκεύασε συνάρτηση ὑποπρόγραμμα ἡ ὁποία γιά δοθέντας θετικούς ἀκεραίους M, N εὑρίσκει τόν μέγιστο κοινό διαιρέτη τους.

P14.8 ``Ἡ ἀπόσταση δύο σημείων $(x_1,x_2,...,x_n)$, $(y_1,...,y_n)$ τοῦ n-διάστατου χώρου δίδεται ἀπό τόν ἀριθμό :

$$((y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\ldots+(y_n-x_n)^2)^{\frac{1}{2}}$$

Κατασκεύασε πρόγραμμα τό όποῖο διαβάζει ἕνα n, διαβάζει κατόπιν δύο διανύσματα $A=(a_1,\ldots,a_n)$, $B=(b_1,\ldots,b_n)$ καί ὑπολογίζει τήν ἀπόσταση τῶν A καί B μέ τήν βοήθεια μιᾶς κατάλληλης συναρτήσεως-ὑποπρογράμματος.

P14.9 Κατασκεύασε συνάρτηση ὑποπρόγραμμα ἡ ὁποία γιά δοθέντας ἀκεραίους θετικούς n καί p εὑρίσκει τόν πραγματικό ἀριθμό

$$\alpha(n,p)=1+\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}$$

μέ DOUBLE PRECISION ἀριθμούς .

P14.10 Τό σχῆμα τοῦ Horner ὅπως λέγεται εἶναι μία ἁπλή μέθοδος ὑπολογισμοῦ τῆς τιμῆς P(x) ἑνός πολυωνύμου

$$P(x)=a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

γιά δοθέν x. Ὁ ὑπολογισμός γίνεται σέ n διαδοχικά βήματα :

$$S_1=a_1$$
$$S_2=S_1x+a_2$$
$$S_3=S_2x+a_3 \quad \text{κ.ο.κ.} \quad \text{τελικῶς}$$
$$S_n=S_{n-1}x+a_n$$
$$P(x)=S_n$$

Ἡ μέθοδος αὐτή ἰσοδυναμεῖ μέ τό νά ὑπολογίσωμε τό P(x) ἐκτελῶντας τίς πράξεις μέ τήν σειρά πού ὑποδεικνύουν οἱ παρενθέσεις στήν ἑπόμενη ἰσότητα :

$$P(x)=(\ldots(((a_1x+a_2)x+a_3)x+a_4)x+\ldots+a_{n-1})x+a_n \;.$$

Κατασκεύασε συνάρτηση ὑποπρόγραμμα HORNER(A,N,X) ἡ ὁποία δοθέντων τῶν συντελεστῶν τοῦ πολυωνύμου A(1),...,A(N) καί τοῦ X ὑπολογίζει τήν τιμή τοῦ πολυωνύμου γιά τό X αὐτό μέ τό σχῆμα τοῦ Horner πού περιγράψαμε παραπάνω.

P14.11 Ἐάν ἕνας ἀριθμός γράφεται $(a_1a_2a_3\ldots a_n)_B$ ὡς πρός βάση B (δές τά προλεγόμενα τοῦ P9.2), τότε ἰσοῦται μέ τόν ἀριθμό y τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος πού δίδεται ἀπ' τόν τύπο :

$$y=a_1B^{n-1}+a_2B^{n-2}+a_3B^{n-3}+\ldots+a_{n-1}B+a_n$$

Κατασκεύασε συνάρτηση ὑποπρόγραμμα DEKA(A,N,B) ἡ ὁποία δοθέντων τῶν ψηφίων A(1),...,A(N) τοῦ ἀριθμοῦ Y ὡς πρός βάση B ὑπολογίζει τόν Y μέσω τοῦ προηγουμένου τύπου χρησιμοποιῶντας τό σχῆμα τοῦ Horner.

P14.12 Κατασκεύασε συνάρτηση ὑποπρόγραμμα XMAX(X,N) ἡ ὁποία δοθέντος τοῦ διανύσματος X(1),...,X(N) εὑρίσκει τό μέγιστο τῶν X(1),...,X(N) .

P14.13 Κατασκεύασε συνάρτηση ὑποπρόγραμμα ATHP(X,N) ἡ ὁποία δοθέντος τοῦ διανύσματος X(1),...,X(N) ὑπολογίζει τό ἄθροισμα X(1)+X(2)+...+X(N) .

P14.14 Εἶναι ἡ ἑπόμενη συνάρτηση ὑποπρόγραμμα σωστή;

```
REAL FUNCTION XMESO2(A,B)
A=A**2
B=B**2
XMESO2=(A-B)/2.
RETURN
END
```

P14.15 Κατασκεύασε συνάρτηση ὑποπρόγραμμα KAI(A,N) ἡ ὁποία δοθέντος τοῦ LOGICAL A(N) παίρνει τήν τιμή .TRUE. ἐάν <u>ὅλα</u> τά A(1),...,A(N) ἔχουν τήν τιμή .TRUE. ἄλλως παίρνει τήν τιμή .FALSE. .

P14.16 Κατασκεύασε συνάρτηση ὑποπρόγραμμα H(A,N) ἡ ὁποία δοθέντος τοῦ LOGICAL A(N) παίρνει τήν τιμή .TRUE. ἐάν <u>ἕνα τουλάχιστον</u> ἐκ τῶν A(1),...,A(N) ἔχει τήν τιμή .TRUE. ἄλλως παίρνει τήν τιμή .FALSE. .

P14.17 Κατασκεύασε μιά συνάρτηση ὑποπρόγραμμα

MERES(ETOS1,ETOS2)

ἡ ὁποία εὑρίσκει πόσες μέρες μεσολαβοῦν μεταξύ τῶν ἡμερομηνιῶν 1.1.ETOS1 καί 1.1.ETOS2 π.χ. μεταξύ τῆς 1.1.1950 καί 1.1.1981 . Τό πρόγραμμα πρέπει νά ὑπολογίζη καί τίς ἐπί πλέον ἡμέρες γιά τά δίσεκτα ἔτη πού μεσολαβοῦν ἀνάμεσα στίς δύο ἡμερομηνίες. Τό ἀποτέλεσμα θέλουμε νά εἶναι θετικό ἀνεξαρτήτως τοῦ ἄν ETOS1<ETOS2 ἤ ὄχι.

*P14.18 Κατασκεύασε συνάρτηση ὑποπρόγραμμα
MER(HMERA1,MHNAS1,ETOS1,HMERA2,MHNAS2,ETOS2)
ἡ ὁποία ὑπολογίζει τίς μέρες πού μεσολαβοῦν ἀνάμεσα στίς δύο ἡμερομηνίες HMERA1.MHNAS1.ETOS1 και HMERA2.MHNAS2.ETOS2 Τό ἀποτέλεσμα νά εἶναι θετικό ἀνεξαρτήτως τοῦ ἄν ETOS1>ETOS2 ἤ ὄχι .

15

Ἡ ἐντολή EXTERNAL (=ἐξωτερικός)

Ὁ λεγόμενος κανόνας τοῦ τραπεζίου, προσεγγίζει τό ὁλοκλήρωμα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

μιᾶς συναρτήσεως f μέ συνεχή δεύτερη παράγωγο στό διάστημα (α,β) μέ τήν ἑξῆς μέθοδο :

1ον) Τό (α,β) διαιρεῖται σέ N ἴσα διαστήματα μήκους $h=(\beta-\alpha)/N$ μέσω τῶν σημείων $x_0=\alpha, x_1=\alpha+h, \ldots, x_{N-1}=\alpha+(N-1)h,\ x_N=\beta$.

2ον) Ἡ καμπύλη τῆς συναρτήσεως $y=f(x)$ ἀντικαθίσταται μέσω τῆς τεθλασμένης εὐθείας πού ἑνώνει τά σημεῖα $(x_0,f(x_0)),\ldots,(x_N,f(x_N))$ (δές σχ. 1).

3ον) Σέ κάθε ὑποδιάστημα (x_i,x_{i+1}) ἀντικαθίσταται τό ὁλοκλήρωμα

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

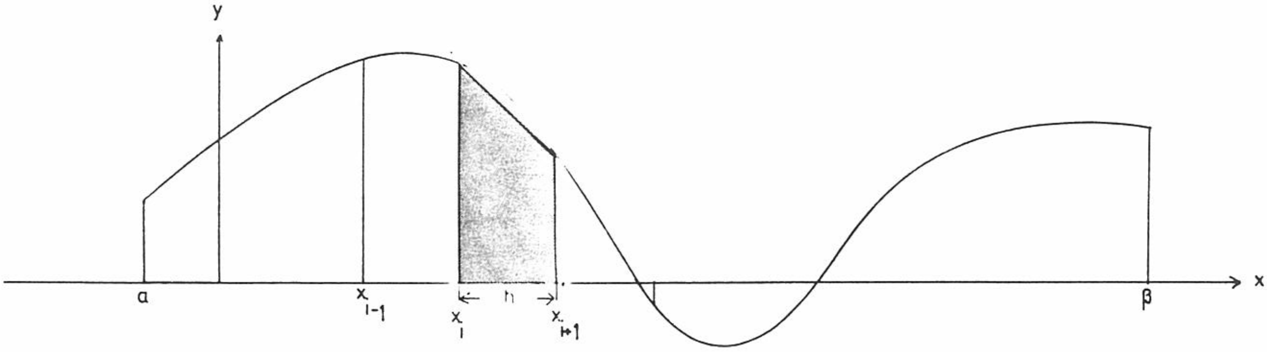
μέ τό ἐμβαδόν τοῦ ἀντιστοίχου τραπεζίου (δές σχ. 1) $(f(x_i)+f(x_{i+1}))h/2$.

Ἡ προσέγγιση πού προκύπτει γιά τό ὁλοκλήρωμα δίδεται ἀπ' τόν τύπο

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \sim \frac{1}{2}h(f(\alpha)+f(\beta)+2\{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{N-1})\})$$

Τό σφάλμα κατά τήν προσέγγιση εἶναι $-\frac{\beta-\alpha}{12}h^2 f''(\eta)$ ὅπου

$f''(\eta)$ ἡ δεύτερη παράγωγος τῆς f σέ κάποιο σημεῖο η τοῦ διαστήματος (α,β) .



(σχ. 1)

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα ὑπολογίζει τό ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως

$$y=x^2$$

στό διάστημα (-1,1) ὑποδιαιρῶντας τό διάστημα σέ 100, 200, ..., 9900, 10000 ὑποδιαστήματα . Ἡ ἀκριβής τιμή τοῦ ὁλοκληρώματος εἶναι 2/3=0.666666666...

<u>Πρόγραμμα :</u>

```
C   P15.1      ORISMENA OLOKLHROMATA
C              O KANONAS TOY TRAPEZIOY
C
      EXTERNAL  F
C
      READ(5,200)  A,B,N
  200 FORMAT(2G8.0,I8)
      DO 33 N=100,10000,100
      OLOKLH=TRAP(F,A,B,N)
      WRITE(6,100) N, OLOKLH
   33 CONTINUE
C
  100 FORMAT(1H ,5X,2HN=,I6,13H  OLOKLHROMA=,1PE16.8)
      STOP
      END


      REAL FUNCTION TRAP(F,A,B,N)
      H=(B-A)/FLOAT(N)
      S=0.
      N1=N-1
      DO 33 I=1,N1
   33 S=S+F(A+H*FLOAT(I))
      TRAP=H*(0.5*(F(A)+F(B))+S)
      RETURN
      END
      REAL FUNCTION F(X)
       F=X*X
      RETURN
      END
```

(σχ. 2)

'Αποτελέσματα :

```
N=   100  OLOKLHROMA=  6.66789100E-01
N=   200  OLOKLHROMA=  6.66683900E-01
N=   300  OLOKLHROMA=  6.66665000E-01
N=   400  OLOKLHROMA=  6.66659000E-01
N=   500  OLOKLHROMA=  6.66655300E-01
N=   600  OLOKLHROMA=  6.66654800E-01
N=   700  OLOKLHROMA=  6.66654100E-01
N=   800  OLOKLHROMA=  6.66650300E-01
N=   900  OLOKLHROMA=  6.66640500E-01
N=  1000  OLOKLHROMA=  6.66629700E-01
N=  1100  OLOKLHROMA=  6.66623200E-01
N=  1200  OLOKLHROMA=  6.66611600E-01
N=  1300  OLOKLHROMA=  6.66599900E-01
N=  1400  OLOKLHROMA=  6.66589600E-01
N=  1500  OLOKLHROMA=  6.66568900E-01
N=  1600  OLOKLHROMA=  6.66495000E-01
N=  1700  OLOKLHROMA=  6.66485600E-01
N=  1800  OLOKLHROMA=  6.66485800E-01
N=  1900  OLOKLHROMA=  6.66470400E-01
N=  2000  OLOKLHROMA=  6.66465900E-01
N=  2100  OLOKLHROMA=  6.66457500E-01
N=  2200  OLOKLHROMA=  6.66460400E-01
N=  2300  OLOKLHROMA=  6.66461500E-01
N=  2400  OLOKLHROMA=  6.66458800E-01
N=  2500  OLOKLHROMA=  6.66448600E-01
N=  2600  OLOKLHROMA=  6.66442800E-01
N=  2700  OLOKLHROMA=  6.66453500E-01
N=  2800  OLOKLHROMA=  6.66451300E-01
N=  2900  OLOKLHROMA=  6.66448800E-01
N=  3000  OLOKLHROMA=  6.66446800E-01
N=  3100  OLOKLHROMA=  6.66447300E-01
N=  3200  OLOKLHROMA=  6.66443700E-01
N=  3300  OLOKLHROMA=  6.66443700E-01
  ...         ...         ...       ...
N=  8100  OLOKLHROMA=  6.66428500E-01
N=  8200  OLOKLHROMA=  6.66437900E-01
N=  8300  OLOKLHROMA=  6.66429700E-01
N=  8400  OLOKLHROMA=  6.66431000E-01
N=  8500  OLOKLHROMA=  6.66430200E-01
N=  8600  OLOKLHROMA=  6.66427100E-01
N=  8700  OLOKLHROMA=  6.66435300E-01
N=  8800  OLOKLHROMA=  6.66430700E-01
N=  8900  OLOKLHROMA=  6.66432400E-01
N=  9000  OLOKLHROMA=  6.66436400E-01
N=  9100  OLOKLHROMA=  6.66430400E-01
N=  9200  OLOKLHROMA=  6.66430800E-01
N=  9300  OLOKLHROMA=  6.66433200E-01
N=  9400  OLOKLHROMA=  6.66428000E-01
N=  9500  OLOKLHROMA=  6.66430300E-01
N=  9600  OLOKLHROMA=  6.66429400E-01
N=  9700  OLOKLHROMA=  6.66430200E-01
N=  9800  OLOKLHROMA=  6.66428500E-01
N=  9900  OLOKLHROMA=  6.66430100E-01
N= 10000  OLOKLHROMA=  6.66431600E-01
```

(σχ. 3)

α) Στό ὑποπρόγραμμα TRAP τό ὁποῖο ὑπολογίζει τό ἄθροισμα στή δεξιά πλευρά τοῦ (*) ἐμφανίζεται σάν τυπική μεταβλητή τῆς συναρτήσεως τό ὄνομα μιᾶς ἄλλης συναρτήσεως, τῆς F . Τοῦτο εἶναι δυνατόν ὅταν στό κύριο πρόγραμμα ἡ συνάρτηση αὐτή ἀνακοινώνεται μέ τό EXTERNAL (=ἐξωτερική). Κάθε συνάρτηση πού ἀνακοινώνεται μέ τό EXTERNAL πρέπει νά δίδεται στό πρόγραμμα ὑπό μορφήν συναρτήσεως ὑποπρογράμματος. Ἔτσι λ.χ. στό προηγούμενο πρόγραμμα ἐδώσαμε τήν F ὑπό μορφήν συναρτήσεως ὑποπρογράμματος ἐνῶ θά μπορούσαμε νά τήν δώσουμε καί σάν συνάρτηση ἐντολή

```
F(X)= X**2
```

Ὁ κανόνας τοῦ Romberg πού θά ἐξετάσουμε παρακάτω ἀπαιτεῖ τήν κατασκευή μιᾶς μήτρας τῆς μορφῆς

$$\begin{array}{cccccc}
\alpha_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & 0 & 0 & \dots \\
\alpha_{4,1} & \alpha_{4,2} & \alpha_{4,3} & \alpha_{4,4} & 0 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

βάσει τῶν ἑξῆς κανόνων :

1ον) $\alpha_{1,1}$ δίδεται ἐκ τῶν προτέρων

2ον) Τά στοιχεῖα τῆς πρώτης στήλης κατασκευάζονται ἐπαγωγικά, ἕκαστο ἀπό τό προηγούμενο μέσω ἑνός τύπου τῆς μορφῆς :

$$\alpha_{n+1,1} = \varphi(\alpha_{n,1}, n)$$

ὅπου φ δοθεῖσα συνάρτηση.

3ον) Τά ὑπόλοιπα μή μηδενικά στοιχεῖα

$\alpha_{n+1,2}, \alpha_{n+1,3}, \dots, \alpha_{n+1,n+1}$

τῆς (n+1)-γραμμῆς κατασκευάζονται ἐπαγωγικά μέσω τοῦ τύπου

$$\alpha_{n+1,j} = \frac{1}{4^{j-1}-1}(4^{j-1}\alpha_{n+1,j-1} - \alpha_{n,j-1})$$

για $j=2,3,\dots,n+1$

4ον) Ἡ κατασκευή τῆς μήτρας σταματᾶ ὅταν πληροῦται γιά κάποιο n τό ε-κριτήριο

$$|\alpha_{n,n}-\alpha_{n,n-1}|<\varepsilon$$

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα κατασκευάζει τήν μήτρα Α μέ τούς παραπάνω κανόνες ξεκινῶντας ἀπό τό $α_{1,1}=5$ καί τήν συνάρτηση $φ(x,n)= \frac{x}{2} + \frac{3}{2n}$. 'Εάν τό ε-κριτήριο δέν πληροῦται μετά τήν κατασκευή τῶν 10 πρώτων γραμμῶν καί στηλῶν τῆς μήτρας, τότε σταματᾶ ἡ κατασκευή καί τυπώνεται τό πάνω ἀριστερά τμῆμα τῆς μήτρας ἀποτελούμενο ἀπ' τίς 10 πρῶτες στῆλες καί 10 πρῶτες σειρές . 'Εάν τό ε-κριτήριο πληροῦται μετά $n \leq 10$ βήματα, τότε τυπώνεται τό πάνω δεξιά $n \times n$ μέρος τῆς μήτρας.

<u>Πρόγραμμα :</u>

```
C  P15.2    DIADOXIKH KATASKEYH TON GRAMMON MIAS MHTRAS,
C           PROETOIMASIA GIA TON KANONA TOY ROMBERG
C
      DIMENSION   A(10,10)
      FI(X,N)=0.5*X+1.5/FLOAT(N)
      E=0.001
      M=10
C
C  TO RPOTO STOIXEIO THS MHTRAS A(1,1) DIDETAI
      A(1,1)=5.
C
C  SYMPLHROSH THS PROTHS GRAMMHS ME O:
      DO 11 I1=2,M
   11 A(1,I1)=0.
C
C  DIADOXIKH KATASKEYH TON YPOLOIPON GRAMMON THS A :
      DO 33 I=2,M
C
C  TO PROTO STOIXEIO THS EPOMENHS GRAMMHS
      A(I,1)=FI(A(I-1,1),I)
C
C  TA YPOLOIPA STOIXEIA THS EPOMENHS GRAMMHS
           DO 44 J=2,I
           F4=4.**(J-1)
   44      A(I,J)=(F4*A(I,J-1)-A(I-1,J-1))/(F4-1.)
C
C  SYMPLHROSH THS GRAMMHS ME 0
      IF(I.EQ.M) GO TO 66
      I2=I+1
           DO 55 J=I2,M
   55      A(I,J)=0.
C
C  KRITHRIO DIAKOPHS
   66 IF(ABS(A(I,I)-A(I,I-1)).LT.E) GO TO 77
   33 CONTINUE
C
C  EKTYPOSH
```

(σχ. 4)

```
      WRITE (6,100)  M
      K=M
      GO TO 88
   77 WRITE(6,200) I
      K=I
   88 DO 888 I8=1,K
  888 WRITE(6,300) (A(I8,J8),J8=1,K)
  100 FORMAT(1H0,5X,'META',I4,' BHMATA O ALGORITHMOS',
    1      ' DEN SYGLINEI')
  200 FORMAT(1H0,5X,'META',I4,' BHMATA PLHROYTAI TO '
    2      ,'E-KRITHRIO')
  300 FORMAT(1H0,10F10.7)
      STOP
      END
```

(σχ. 4 συνέχεια)

'Αποτελέσματα :

```
 META    6 BHMATA PLHROYTAI TO E-KRITHRIO

5.0000000 0.0       0.0       0.0       0.0       0.0

3.2500000 2.6666660 0.0       0.0       0.0       0.0

2.1250000 1.7500000 1.6888885 0.0       0.0       0.0

1.4375000 1.2083330 1.1722212 1.1640196 0.0       0.0

1.0187492 0.8791656 0.8572211 0.8522210 0.8509982 0.0

0.7593746 0.6729164 0.6591665 0.6560225 0.6552531 0.6550615
```

(σχ. 5)

'Ο λεγόμενος "κανόνας ὁλοκληρώσεως τοῦ Romberg " βασίζεται στήν προηγούμενη κατασκευή τῆς μήτρας $(\alpha_{i,j})$ καί τόν κανόνα τοῦ τραπεζίου ὁ ὁποῖος ἀντικαθιστᾶ τήν φ τοῦ προηγουμένου προγράμματος. Συγκεκριμένα παίρνουμε

1ον) Τό $\alpha_{1,1}$ = TRAP(F,A,B,N) γιά ἕνα N πού δίδεται ἐκ τῶν προτέρων

2ον) 'Ο ἐπαγωγικός τύπος κατασκευῆς τῆς πρώτης στήλης (δές φ τοῦ P15.2) εἶναι

$\alpha_{K+1,1}$ = TRAP(F,A,B,N*2**(K-1))

3ον) Κατασκευή τῆς μήτρας $\alpha_{i,j}$ ὅπως στό P15.2 . 'Εάν πληροῦται τό ε-κριτήριο γιά κάποιο n τότε παίρνουμε σάν προσέγγιση τοῦ ὁλοκληρώματος

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \sim \alpha_{n,n}$$

Στό ἑπόμενο πρόγραμμα ὑπολογίζουμε μέ τόν κανόνα τοῦ Romberg τό ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως $2\sqrt{1-x^2}$ στό διάστημα (-1,1) ξεκινῶντας μέ N=100 .

Πρόγραμμα :

```
C  P15.3     ORISMENA OLOKLHROMATA
C            H METHODOS TOY ROMBERG
C
      DIMENSION A(10,10)
      EXTERNAL   F
C
      READ(5,400) ALPHA, BHTA, E, N
  400 FORMAT(3G10.0,I10)
      M=10
      A(1,1) = TRAP(F,ALPHA, BHTA,N)
C
C  SYMPLHROSH THS PROTHS GRAMMHS ME 0:
      DO 11 I1=2,M
   11 A(1,I1)=0.
C
C  DIADOXIKH KATASKEYH TON YPOLOIPON GRAMMON THS A :
      DO 33 I=2,M
C
C  TO PROTO STOIXEIO THS EPOMENHS GRAMMHS
      II=2**(I-1)*N
      A(I,1)=TRAP(F,ALPHA,BHTA,II)
C
C  TA YPOLOIPA STOIXEIA THS EPOMENHS GRAMMHS
             DO 44 J=2,I
             F4=4.**(J-1)
   44        A(I,J)=(F4*A(I,J-1)-A(I-1,J-1))/(F4-1.)
C
C  SYMPLHROSH THS GRAMMHS ME 0
      IF(I.EQ.M) GO TO 66
      I2=I+1
             DO 55 J=I2,M
   55        A(I,J)=0.
C
C  KRITHRIO DIAKOPHS
   66 IF(ABS(A(I,I)-A(I,I-1)).LT.E) GO TO 77
   33 CONTINUE
      WRITE (6,100)  M
      K=M
      GO TO 88
   77 WRITE(6,200) I
      K=I
   88 DO 888 I8=1,K
  888 WRITE(6,300) (A(I8,J8),J8=1,K)
  100 FORMAT(1H0,5X,'META',I4,' BHMATA O ALGORITHMOS',
     1       ' DEN SYGLINEI')
  200 FORMAT(1H0,5X,'META',I4,' BHMATA PLHROYTAI TO '
     2       ,'E-KRITHRIO')
  300 FORMAT(1H0,10F10.7)
      STOP
      END
```

(σχ. 6)

```
      REAL FUNCTION TRAP(F,A,B,N)
      H=(B-A)/FLOAT(N)
      S=0.
      N1=N-1
      DO 33 I=1,N1
   33 S=S+F(A+H*FLOAT(I))
      TRAP=H*(0.5*(F(A)+F(B))+S)
      RETURN
      END

      REAL FUNCTION F(X)
      F=2.*SQRT(1.-X*X)
      RETURN
      END
```

(σχ. 6 συνέχεια)

'Αποτελέσματα :

```
     META   4 BHMATA PLHROYTAI TO E-KRITHRIO

3.1382561 0.0       0.0       0.0

3.1403484 3.1410456 0.0       0.0

3.1410265 3.1412525 3.1412659 0.0

3.1412544 3.1413298 3.1413336 3.1413345
```

(σχ. 7)

β) Στά FORMAT τοῦ προηγουμένου προγράμματος βλέπουμε ἕνα διαφορετικό τρόπο νά τυπώνωμε κείμενο. Τό κείμενο πού θέλομε νά τυπώσωμε τό περικλείουμε μέ δύο ἄνω κόμματα (δές τά FORMAT τοῦ P15.3). Τούτη ἡ δυνατότης δέν ἀνήκει στά στοιχεία τῆς ANSI-FORTRAN παρέχεται ἐν τούτοις σέ πολλούς ὑπολογιστές μεταξύ τῶν ὁποίων καί ὁ IBM-370. Μέ τοῦτο τόν τρόπο ἀποφεύγουμε τό μέτρημα τῶν στοιχείων πού θέλουμε νά τυπώσουμε, πράγμα ἀναγκαῖο ὅταν χρησιμοποιοῦμε τόν H-κώδικα. Στό ἑξῆς θά χρησιμοποιοῦμε καί τούς δύο τρόπους. Ὁ ἀναγνώστης θά πρέπει νά πληροφορηθῆ ἄν ὁ ὑπολογιστής μέ τόν ὁποῖο ἐργάζεται παρέχει τήν παραπάνω δυνατότητα γραφῆς κειμένου. Ἐάν ὄχι, τότε θά πρέπει νά τυπώνη τό κείμενο μέ τόν τρόπο πού χρησιμοποιούσαμε μέχρι τώρα (μέ τή βοήθεια τοῦ H-κώδικα).

'Ασκήσεις

P15.4 Γιατί στό P15.3 δέν χρειάζεται νά ἀνακοινώσωμε μέ τό EXTERNAL τήν SQRT συνάρτηση πού ἐμφανίζεται στήν F;

P15.5 Βρές μέ τό P15.1 τό $\int_0^1 1.dx = 1.$

P15.6 Βρές μέ τό P15.3 τό προηγούμενο όλοκλήρωμα (P15.5) παίρνοντας E=1.E-6 καί N=10,50,100 καί 1000 .

P15.7 Ποιό εἶναι τό μεγαλύτερο N μέ τό ὁποῖο μπορεῖ νά λειτουργήση τό P15.3 ;

P15.8 Βάσει τοῦ προγράμματος P15.3 κατασκεύασε μία συνάρτηση ὑποπρόγραμμα

DOUBLE PRECISION ROMBRG(F,ALPH,BHT,N,E)

ἡ ὁποία ὑπολογίζει τό ὁλοκλήρωμα τῆς F στό διάστημα (ALPH,BHT) μέ τόν κανόνα τοῦ Romberg ἐφ' ὅσον πληροῦται τό ε-κριτήριο, ἄλλως ἐπιστρέφει στό κύριο πρόγραμμα τήν τιμή 0.

P15.9 'Ο λεγόμενος "κανόνας τοῦ Simpson" προσεγγίζει τό ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως f στό διάστημα (α,β) βάσει τοῦ τύπου

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \sim \frac{h}{3}\{f(\alpha)+f(\beta)+4\sum_{k=0}^{N-1} f(\alpha+(2k+1)h)+2\sum_{k=1}^{N-1} f(\alpha+2kh)\}$$

μέ $h = \frac{(\beta-\alpha)}{2N}$. Κατασκεύασε ἕνα ἀντίστοιχο ὑποπρόγραμμα SIMPS(F,A,B,N)

P15.10 'Ο λεγόμενος "κανόνας τῶν 3/8" προσεγγίζει τό ὁλοκλήρωμα τῆς συναρτήσεως f στό διάστημα (α,β) βάσει τοῦ τύπου

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \sim \frac{3}{8}h\{f(\alpha)+f(\beta)+3\sum_{k=1}^{N} f(\alpha+(3k-2)h)+$$
$$+3\sum_{k=1}^{N} f(\alpha+(3k-1)h)+2\sum_{k=1}^{N-1} f(\alpha+3kh)\}$$

ὅπου $h = \frac{\beta-\alpha}{3N}$. Κατασκεύασε ἀντίστοιχο συνάρτηση ὑποπρόγραμμα CN38(F,A,B,N)

*P15.11 Τροποποίησε τό πρόγραμμα P15.2 ἔτσι ὥστε νά κατασκευάζη διαδοχικά τίς γραμμές τῆς μήτρας $\alpha_{i,j}$ χωρίς νά χρησιμοποιῆ μεταβλητές μέ δύο δεῖκτες παρά μόνο μεταβλητές μέ ἕνα δείκτη.

P15.12 Μποροῦμε χρησιμοποιῶντας μία συνάρτηση ὑποπρόγραμμα νά περιγράψουμε τόν μετασχηματισμό ἀπό κυλιδρικές συντεταγμένες ;

$$y_1 = x_1\cos(x_2)$$
$$y_2 = x_1\sin(x_2)$$
$$y_3 = x_3$$

*P15.13 Γιά τήν μήτρα $\alpha_{i,j}$ πού χρησιμοποιεῖ ὁ κανόνας τοῦ Romberg ἰσχύει ἡ ἑξῆς ἐπαγωγική σχέση γιά τά στοιχεῖα τῆς πρώτης στήλης :

$$\alpha_{n,1} = \frac{1}{2}\alpha_{n-1,1} + \frac{\beta-\alpha}{M}\sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} f\left(\alpha+(2k+1)\frac{\beta-\alpha}{M}\right) \quad \text{ὅπου } M=N2^{n-1}$$

Τροποποίησε τό P15.3 ἔτσι ὥστε νά ὑπολογίζη τό ὁλοκλήρωμα μέ τή βοήθεια μεταβλητῶν ἑνός δείκτου μόνον (δές P15.11) χρησιμοποιῶντας ταυτόχρονα τόν παραπάνω τύπο.

16

SUBROUTINE (=ὑπορουτίνα)

Ἐκτός τῶν συναρτήσεων ὑποπρογραμμάτων πού γνωρίσαμε διαθέτει ἡ FORTRAN καί ἕνα ἄλλο εἶδος ὑποπρογραμμάτων τίς λεγόμενες ὑπορουτίνες. Ἡ λειτουργία τους ἐξηγεῖται βάσει τοῦ ἐπομένου παραδείγματος, τό ὁποῖο γιά δοθέν $n \leq 100$ διαβάζει δύο διανύσματα $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ καί εὑρίσκει τό ἄθροισμά τους $(c_1 = a_1 + b_1, \ldots, c_n = a_n + b_n)$

Πρόγραμμα :

```
C  P16.1  ATHROISMA DIANYSMATON TO POLY 100 DIASTASEON
C
      DIMENSION A(100),B(100),C(100)
C
C  DIABASE TA N, A(1),....,A(N), B(1),....,B(N)
      READ(5,100)  N
      READ(5,200)  (A(I),I=1,N)
      READ(5,200)  (B(I),I=1,N)
C
C  BRES TO ATHROISMA C(1),....,C(N) TON A, B
      CALL ATHROI(A,B,C,N)
C
C  TYPOSE TA A,B,C
      WRITE(6,300)  (A(I),I=1,N)
      WRITE(6,300)  (B(I),I=1,N)
      WRITE(6,300)  (C(I),I=1,N)
C
C   TA FORMAT TOY PROGRAMMATOS
  100 FORMAT(I4)
  200 FORMAT(10G8.0)
  300 FORMAT(1H0, 4G15.7 )
      STOP
      END
```

(σχ. 1)

```
      SUBROUTINE ATHROI(X,Y,Z,M)
      DIMENSION X(M),Y(M),Z(M)
      DO 11 I=1,M
   11 Z(I)=X(I)+Y(I)
      RETURN
      END
```

(σχ. 1 συνέχεια)

<u>'Αποτελέσματα :</u>

```
1.000000       2.000000       3.000000       4.000000
6.000000      -7.000000      -9.000000       3.000000
6.000000      -0.2300000
3.560000       3.240000       0.0000000      2.200000
3.400000     -45.55000        0.1000000E-03  0.2000000E-02
6.520000       1.000000
4.560000       5.240000       3.000000       6.200000
9.400000     -52.55000       -8.999900       3.002000
12.52000       0.7700000
```

(σχ. 2)

α) 'Η SUBROUTINE ATHROI προσθέτει δύο διανύσματα X, Y καί έπιστρέφει στό κύριο πρόγραμμα τό ἄθροισμά τους Z = X + Y .

β) 'Η λειτουργία μιᾶς SUBROUTINE εἶναι ἀνάλογη μέ ἐκείνη τῶν συναρτήσεων ὑποπρογραμμάτων (δές 14.γ).
Μόλις συναντήση ὁ ὑπολογιστής τήν ἐντολή

CALL ATHROI(A,B,C,N)

"πηδᾶ" στό ὑποπρόγραμμα SUBROUTINE ATHROI(X,Y,Z,M) ἀντικαθιστᾶ τά X, Y, Z, M (τυπικές μεταβλητές τοῦ ὑποπρογράμματος) μέ τά A, B, C, N ἐκτελεῖ τούς ὑπολογισμούς πού περιέχονται στήν SUBROUTINE καί ἐπιστρέφει τά ἀποτελέσματα στό κύριο πρόγραμμα, μέ τό πρῶτο RETURN πού θά συναντήση.

γ) Σέ μία SUBROUTINE τόσο τά διδόμενα μεγέθη (στό P16.1 τά A,B,N) ὅσο καί τά ζητούμενα ἀπ' τό κύριο πρόγραμμα (στό P16.1 τό C) περικλείονται ἐντός τῶν παρενθέσεων. Μετά τήν ἐκτέλεση τοῦ CALL τά ἀποτελέσματα πού ὑπολογίστηκαν μέ τήν SUBROUTINE μπορούν νά χρησιμοποιηθοῦν σέ ὁποιοδήποτε μέρος τοῦ ὑπολοίπου προγράμματος (στό P16.1 στό τελευταῖο WRITE τοῦ προγράμματος).

δ) Τό ὄνομα μιᾶς SUBROUTINE ἀκολουθεῖ τούς κανόνες 1.δ, 1.ε <u>ὄχι</u> ὅμως τόν 3.ζ .

ε) Παρατηροῦμε ὅτι οἱ μέν συναρτήσεις ὑποπρογράμματα ἐπιστρέφουν στό κύριο πρόγραμμα ἕναν καί μόνον ἀριθμό, ἐνῶ μία SUBROUTINE μπορεῖ νά ἐπιστρέφη ὁλόκληρο διάνυσμα (τό (C(1),C(2),...,C(N)) στό προηγούμενο πρόγραμμα) ἤ μήτρα κ.τ.λ.

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα διαβάζει δύο διανύσματα (a_1,a_2,a_3) (b_1,b_2,b_3) καί εὑρίσκει τό ἐξωτερικό γινόμενο πού ὁρίζεται σάν τό διάνυσμα μέ συνιστῶσες (c_1,c_2,c_3) ὅπου

$$c_1 = a_2b_3 - b_2a_3$$
$$c_2 = a_3b_1 - b_3a_1$$
$$c_3 = a_1b_2 - b_1a_2$$

<u>Πρόγραμμα :</u>

```
C  P16.2  TO EXOTERIKO GINOMENO DYO DIANYSMATON
C
      DIMENSION   A(3),B(3),C(3)
      READ(5,100)  (A(I),I=1,3),(B(I),I=1,3)
      CALL EXOGIN(A,B,C)
      WRITE(6,200)  (A(I),I=1,3),(B(I),I=1,3),(C(I),I=1,3)
  100 FORMAT(10G8.0)
  200 FORMAT(1H0,3G15.7/)
      STOP
      END

      SUBROUTINE  EXOGIN(X,Y,Z)
      DIMENSION X(3),Y(3),Z(3)
      Z(1)=X(2)*Y(3)-Y(2)*X(3)
      Z(2)=X(3)*Y(1)-Y(3)*X(1)
      Z(3)=X(1)*Y(2)-Y(1)*X(2)
      RETURN
      END
```

(σχ. 3)

<u>Ἀποτελέσματα :</u>

```
10.00000      50.00000       30.00000

2.000000      0.6000000      0.9000000

26.99998      51.00000      -94.00000
```

(σχ. 4)

Τό έπόμενο πρόγραμμα διαβάζει μία μήτρα τό πολύ 20 διαστάσεων καί εὑρίσκει τούς δεῖκτες MEG1, MEG2 γιά τούς ὁποίους τό A(MEG1,MEG2) εἶναι τό μέγιστο κατ' ἀπόλυτο τιμή στοιχεῖο τῆς μήτρας A .

Πρόγραμμα :

```
C   P16.3   TO APOLYTOS MEGISTO STOIXEIO MIAS MHTRAS
C
      DIMENSION  A(20,20)
      READ(5,100)  N
C   DIABASE KAI TYPOSE THN A(N,N) GRAMMH PROS GRAMMH
      DO 11 I=1,N
      READ(5,200)  (A(I,J),J=1,N)
   11 WRITE(6,300) (A(I,J),J=1,N)
C
      CALL  MEGIST(A,20,N,MEG1,MEG2)
      WRITE(6,400)  MEG1,MEG2,A(MEG1,MEG2)
  100 FORMAT(I4)
  200 FORMAT(10G8.0)
  300 FORMAT(1H0,10G13.5)
  400 FORMAT(//5H0  A(,I2,1H,,I2,2H)=,G12.5,
     *        35H , TO APOLYTOS MEGISTO THS MHTRAS A   )
      STOP
      END
      SUBROUTINE MEGIST(ALPHA,NKYRIO,NYPO,M1,M2)
      DIMENSION  ALPHA(NKYRIO,NKYRIO)
      M1=1
      M2=1
      DO 11 I=1,NYPO
           DO 11 J=1,NYPO
           IF(ABS(ALPHA(I,J)).LE.ABS(ALPHA(M1,M2)))  GO TO 11
           M1=I
           M2=J
   11 CONTINUE
      RETURN
      END
```

(σχ. 5)

'Αποτελέσματα :

```
 100.00        456.00        .23540        32.000

 .20000        32.000        9000.0        37.000

 222.00        .33333E+06    6666.0        .86300E+07

 1.0000        3.0000        9999.0        .90001E+06


A( 3, 4)=   .86300E+07 , TO APOLYTOS MEGISTO THS MHTRAS A
```

(σχ. 6)

ζ) Τό NKYRIO στήν SUBROUTINE MEGIST παίρνει τήν τιμή 20 ἔτσι ὥστε ἡ μήτρα ALPHA τοῦ ὑποπρογράμματος καί ἡ ἀντίστοιχος A τοῦ κυρίου προγράμματος νά ἔχουν τίς ἴδιες διαστάσεις (δές 14.ζ καί 14.η). Ἐάν ὁρίζαμε κατ' εὐθείαν

DIMENSION ALPHA(NYPO,NYPO)

στό ὑποπρόγραμμα, θά προέκυπταν λάθη. Ἰσχύει ὁ κανόνας: Κάθε μήτρα τοῦ ὑποπρογράμματος πρέπει νά παίρνη μέ τήν ἐντολή DIMENSION τοῦ ὑποπρογράμματος τίς ἴδιες διαστάσεις πού ἔχει ἡ ἀντίστοιχή της μήτρα στό κύριο πρόγραμμα (θά ἀρκοῦσε ἀκόμη νά πάρωμε στό ὑποπρόγραμμα

DIMENSION ALPHA(NKYRIO,NYPO)

ὁ κανόνας πού ἀναφέραμε ἐν τούτοις γενικεύεται κατά προφανή τρόπο καί γιά μεταβλητές μέ περισσότερους δεῖκτες).
Ὁ ἴδιος κανόνας ἰσχύει καί γιά τυπικές μεταβλητές μέ περισσότερους τῶν 2 δεῖκτες.

η) Ἄν παρατηρήσωμε τό P16.1 θά δοῦμε ὅτι στό ὑποπρόγραμμα ATHROI τά X, Y, Z ἔχουν M διαστάσεις ἐνῶ τά ἀντίστοιχά τους A, B, C στό κύριο πρόγραμμα ἔχουν 100 διαστάσεις. Τό ζ) λοιπόν δέν ἰσχύει γιά μεταβλητές μέ ἕνα μόνο δείκτη. Πάντως καί γιά τά διανύσματα πρέπει οἱ διαστάσεις στό ὑποπρόγραμμα νά μήν ὑπερβαίνουν τίς διαστάσεις τοῦ ἀντιστοίχου διανύσματος τοῦ κυρίου προγράμματος (δές πάλι 14.ζ, 14.η).

Ἕνα ἀκόμη παράδειγμα ἐφαρμογῆς τῶν παραπάνω κανόνων δίδει καί τό ἑπόμενο πρόγραμμα, τό ὁποῖο προσθέτει δύο μῆτρες A, B τό πολύ 10×10 διαστάσεων.

Πρόγραμμα :

```
C  P16.4    PROSTHESH MHTRON
C
      DIMENSION    A(10,10),B(10,10),C(10,10)
      MA=10
      NA=10
C
C  DIABASE A(N,M), B(N,M)
  100 FORMAT(2I4)
      READ(5,100) N,M
      DO 11 I=1,N
   11 READ(5,200)  (A(I,J),J=1,M)
```

(σχ. 7)

```
      DO 22 I=1,N
   22 READ(5,200)  (B(I,J),J=1,M)
C
C  TYPOSE A(N,M), B(N,M)
      DO 33 I=1,N
   33 WRITE(6,300)  (A(I,J),J=1,M)
      WRITE(6,99999)
      DO 44 I=1,N
   44 WRITE(6,300)  (B(I,J),J=1,M)
      WRITE(6,99999)
99999 FORMAT(1H0)
C
C  PROSTHESE
      CALL SYN(A,B,C,NA,MA.N,M)
C
      DO 55 I=1,N
   55 WRITE(6,300)  (C(I,J),J=1,M)
  200 FORMAT(10F8.1)
  300 FORMAT(1H ,10(1X,F9.3))
      STOP
      END

      SUBROUTINE SYN(X,Y,Z,NA,MA,NS,MS)
C
C  NA, MA = MEGISTES DIASTASEIS ANTISTOIXON MHTRON
C           TOY KYRIOY PROGRAMMATOS
C  NS, MS = DIASTASEIS MHTRON POY DIDONTAI
C  TA NS, MS PREPEI NA EINAI MIKROTERA TON NA, MA
      DIMENSION X(NA,MA),Y(NA,MA),Z(NA,MA)
      DO 1  I1=1,NS
      DO 1  J1=1,MS
    1 Z(I1,J1)=X(I1,J1)+Y(I1,J1)
      RETURN
      END
```

(σχ. 7 συνέχεια)

'Αποτελέσματα :

```
 5.000     1.000     2.000     0.0       1.000
 6.000     0.0       0.0       0.0       3.000
 0.0       1.000     2.000     6.000     6.000


 1.000     1.000     1.000     1.000     1.000
 3.000     1.000     3.000     0.0       1.000
 1.000     5.000     3.000     3.000     3.000


 6.000     2.000     3.000     1.000     2.000
 9.000     1.000     3.000     0.0       4.000
 1.000     6.000     5.000     9.000     9.000
```

(σχ. 8)

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα εὑρίσκει τό γινόμενο δύο μητρῶν A(K,L), B(L,M), C(K,M)=A(K,L)·B(L,M) (δές τά προλεγόμενα τοῦ P9.4) μέ K,L,M $\leqq$ 10

Πρόγραμμα :

```
C   P16.5  POLLAPLASIASMOS MHTRON
       DIMENSION   A(10,10),B(10,10),C(10,10)
C
C   DIABASE TIS MHTRES A KAI B KAI TYPOSE TIS
       KA=10
       LA=10
       MA=10
       READ(5,100)   K, L, M
       DO 11 I=1,K
       READ(5,200)  (A(I,J),J=1,L)
    11 WRITE(6,300) (A(I,J),J=1,L)
       WRITE(6,99999)
       DO 22 I=1,L
       READ(5,200)  (B(I,J),J=1,M)
    22 WRITE(6,300) (B(I,J),J=1,M)
       WRITE(6,99999)
C
C   POLLAPLASIASE TIS MHTRES, TYPOSE TO GINOMENO C
       CALL  EPI(A,B,C,KA,LA,MA,K,L,M)
       DO 33 I=1,K
    33 WRITE(6,300)  (C(I,J),J=1,M)
C
C   TA FORMAT TOY PROGRAMMATOS
   100 FORMAT(3I4)
   200 FORMAT(10G8.0)
   300 FORMAT(1H ,10G13.5)
 99999 FORMAT(1H0)
       STOP
       END

       SUBROUTINE EPI(ENA,DYO,TRIA,K1,L1,M1,K2,L2,M2)
C
C   EYRISKEI TO GINOMENO TRIA(K2,M2) TON MHTRON ENA(K2,L2)
C   EPI DYO(L2,M2)
C   K1, L1, M1   EINAI OI MEGISTES DIASTASEIS TON ANTISTOIXON
C                MHTRON TOY KYRIOY PROGRAMMATOS
C   K2, L2, M2   EINAI OI DIASTASEIS TON MHTRON POY DIDONTAI
C                PREPEI NA EINAI MIKROTERES TON  K1,L1,M1
       DIMENSION  ENA(K1,L1), DYO(L1,M1), TRIA(K1,M1)
       DO 11 I=1,K2
            DO 11 J=1,M2
            S=0.
                 DO 22 N=1,L2
    22           S=S+ENA(I,N)*DYO(N,J)
    11 TRIA(I,J)=S
       RETURN
       END
```

(σχ. 9)

'Αποτελέσματα :

.10000	.20000	.30000E+07	
23.230	30.500	.10000E-02	
3.2000	-500.20	5.5000	
-100.56	33.002	1.1230	
-.12300	-7.8900	99.990	
10.000	11.000	.12000E+08	13.000
-11.000	-15.000	16.000	19.000
.99900	23.560	9999.0	.10000E-03
.29970E+07	.70680E+08	.29998E+11	305.10
-103.20	-201.95	.27876E+09	881.49
5539.7	7667.8	.38447E+08	-9462.2
-1367.5	-1574.7	-.12067E+10	-680.24
185.45	2472.8	-.47633E+06	-151.50

(σχ. 10)

'Ασκήσεις

P16.6 'Από πόσες κάρτες δεδομένων διαβάζονται τά A,B διανύσματα τοῦ P16.2 ; Μέ ποιό τρόπο τυπώνονται τά ἀποτελέσματά του ;

P16.7 Τροποποίησε τό P16.1 ἔτσι ὥστε νά τυπώνη τά A,B, C σέ τρεῖς στῆλες ἀντιστοίχως ἀφοῦ προηγουμένως στήν κορυφή κάθε στήλης γράψει τά γράμματα A,B καί C ἀντιστοίχως.

P16.8 'Αναλόγως πρός τά P16.1 καί P16.4 κατασκεύασε ὑποπρογράμματα τά ὁποῖα δοθέντων τῶν διανυσμάτων/μητρῶν A,B εὑρίσκουν τή διαφορά A-B .

P16.9 Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο μέ τή βοήθεια μιᾶς SUBROUTINE κατασκευάζει καί τυπώνει γιά δοθέντα n<10 καί πραγματικό ἀριθμό D τήν μήτρα n×n διαστάσεων, τῆς ὁποίας τά διαγώνια στοιχεῖα εἶναι ὅλα ἴσα μέ τό

D τά δέ ἐκτός τῆς διαγωνίου στοιχεῖα εἶναι ὅλα 0 .

P16.10 Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖο μέ τήν βοήθεια ἑνός ὑποπρογράμματος EPI2 ὑπολογίζει τό $(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ βάσει τῶν διδομένων $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,m} \end{pmatrix}$ καί $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

σύμφωνα μέ τόν τύπο $y_i = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,m}x_m$

γιά $k,m \leq 10$

P16.11 Κατασκεύασε SUBROUTINE TYXH(X,N,A) ἡ ὁποία δοθέντος περιττοῦ θετικοῦ ἀκεραίου X<32768 καί N≤1000 εὑρίσκει μέ τήν μέθοδο τοῦ P8.4 N τό πλῆθος τυχαίους ἀριθμούς A(1),A(2),...,A(N) .

P16.12 Κατασκεύασε ὑποπρόγραμμα TAXH(X,Y,N) τό ὁποῖο δοθέντος διανύσματος (X(1),...,X(N)) τό διατάσσει κατ' αὔξοντα μεγέθη μέ τή μέθοδο τοῦ P10.3 καί ἐπιστρέφει στό κύριο πρόγραμμα τό διατεταγμένο διάνυσμα (Y(1),Y(2),...,Y(N)) .

P16.13 Κατασκεύασε συνάρτηση ὑποπρόγραμμα ἡ ὁποία εὑρίσκει τό ἐλάχιστο ἑνός διανύσματος (X(1),...,X(N)). Κατασκεύασε κατόπιν μιά SUBROUTINE ἡ ὁποία κάνει τήν ἴδια δουλειά.

*P16.14 Κατασκεύασε ἕνα ὑποπρόγραμμα POLPOL τό ὁποῖο δοθέντων τῶν πολυωνύμων

$$A(x) = a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$
$$B(x) = b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m$$

εὑρίσκει τούς συντελεστάς $c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots, c_k$ τοῦ πολυωνύμου-γινόμενον.

P16.15 Κατασκεύασε ὑποπρόγραμμα τό ὁποῖο δοθείσης τετραγωνικῆς μήτρας n×n διαστάσεων ὑπολογίζει τό μέγιστο κατ' ἀπόλυτο τιμή ἐκ τῶν στοιχείων τῆς μήτρας πού εὑρίσκονται ὑπεράνω τῆς διαγωνίου.

P16.16 Ὅπως ἀναφέραμε καί σέ ἄλλο σημεῖο (δές 14.κ) ἡ χρήση ὑποπρογραμμάτων κάνει ἕνα πρόγραμμα πιό εὐανάγνωστο καί ταυτόχρονα πιό εὐπροσάρμοστο στίς ἀπαιτήσεις ἑνός εἰδικοῦ προβλήματος. Ξαναγρᾶψε τά προγράμματα τῆς §12 χρησιμοποιῶντας κατάλληλα ὑποπρογράμματα .

17

῾Ο Α-κώδικας

᾽Επεξεργασία κειμένου μέ τήν FORTRAN

Μεταβλητό FORMAT (=object time FORMAT)

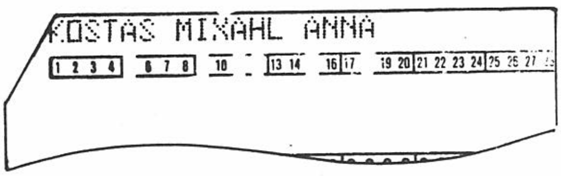
Μέ τόν Α-κώδικα τοῦ FORMAT μποροῦμε νά ἐφοδιάσωμε μιά μεταβλητή ὄχι μέ μιά συγκεκριμμένη ἀριθμητική τιμή ἀλλά μέ κείμενο. Τό ἐπόμενο πρόγραμμα δίδει ἕνα παράδειγμα.

Πρόγραμμα :

```
C   P17.1   O   A-KODIKAS
C
          READ(5,100)  A,B,C,N,M
          WRITE(6,200) A,B,C,N,M
      100 FORMAT( 5A4)
      200 FORMAT(1H  ,5A4)
          STOP
          END
```

(σχ. 1)

῾Η κάρτα δεδομένων πού διαβάζει τό πρόγραμμα εἶναι :



᾽Αποτελέσματα :

```
     KOSTAS MIXAHL ANNA
```

(σχ. 2)

α) Μετά τήν ἐκτέλεση τοῦ READ(5,100) περιέχουν τά A,B,C, N,M τό ἑξῆς κείμενο :

τό	A	περιέχει	τό		KOST
"	B	"	"	"	ASbM
"	C	"	"	"	IXAH
"	N	"	"	"	LbAN
"	M	"	"	"	NAbb

(b=κενό τυπογραφικό διάστημα) .

Τό ὅτι κάθε μεταβλητή ἀπ' τίς A,B,C,N,M περιέχει τέσσερεις τυπογραφικούς χαρακτῆρες καθορίζεται ἀπό τό A4 τοῦ 100 FORMAT (τό κενό πού συμβολίζουμε μέ τό b θεωρεῖται ἐπίσης σάν τυπογραφικός χαρακτήρας στήν FORTRAN).

β) Ἡ γενική μορφή τοῦ A-κώδικα εἶναι

aAw

καί σημαίνει τύπωσε/διάβασε a-τό πλῆθος μεταβλητές πού περιέχουν κάθε μιά w-τυπογραφικούς χαρακτῆρες.

γ) Κάθε ὑπολογιστής θέτει ὁρισμένους περιορισμούς ὡς πρός τό μέγιστο πλῆθος (w) τῶν χαρακτήρων πού μποροῦν νά περιέχωνται ἐντός μιᾶς μεταβλητῆς. Ὁ IBM-370 λ.χ. μέ τόν ὁποῖο ἐκτελέστηκαν τά προγράμματα τοῦ βιβλίου, ἐπιτρέπει τό πολύ 4 τυπογραφικούς χαρακτῆρες σέ κάθε μεταβλητή τοῦ τύπου INTEGER ἤ REAL καί 8 τυπογραφικούς χαρακτῆρες γιά μιά μεταβλητή τοῦ τύπου DOUBLE PRECISION . Τό μέγιστο πλῆθος τυπογραφικῶν χαρακτήρων πού "χωροῦν" σέ μιά μεταβλητή ἑνός ὡρισμένου τύπου (συνήθως χρησιμοποιοῦνται INTEGER μεταβλητές) τό μαθαίνει ὁ προγραμματιστής ἀπό τίς πληροφορίες τοῦ ὑπολογιστικοῦ του κέντρου ἤ ρωτᾶ ἕναν πεπειραμένο τοῦ ἰδίου ὑπολογιστικοῦ κέντρου.

Μιά ἐφαρμογή τοῦ A κώδικα εἶναι τό λεγόμενο "μεταβλητό FORMAT " (=object time FORMAT) στό ὁποῖο οἱ κώδικες μέ τούς ὁποίους διαβάζουμε/τυπώνουμε τά ἀποτελέσματα καθορίζονται κατά τήν διάρκεια ἐκτελέσεως τοῦ προγράμματος. Τό ἑπόμενο πρόγραμμα δίδει ἕνα παράδειγμα.

<u>Πρόγραμμα :</u>

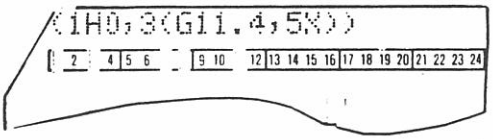
```
C  P17.2  OBJECT TIME FORMAT
C
C  TO DIANYSMA FORMA(15)  PERIEXEI KODIKES ENOS FORMAT
C  TO DIANYSMA FORMB(15)  PERIEXEI KODIKES ENOS ALLOY FORMAT
C  TO DIANYSMA FORMC(15)  PERIEXEI KODIKES ENOS TRITOY FORMAT
```

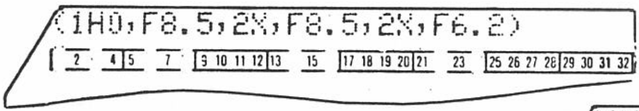
(σχ. 3)

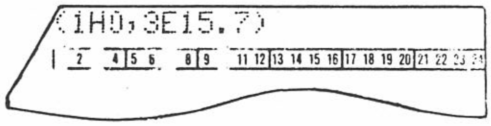
```
      DIMENSION   FORMA(15), FORMB(15), FORMC(15)
      READ(5,100) FORMA
      READ(5,100) FORMB
      READ(5,100) FORMC
  100 FORMAT(15A4)
      X=12.34567
      Y=0.000001
      Z=123.456
C
C  TYPOSE TA X, Y, Z ME TOYS KODIKES POY PERIEXONTAI STA
C  FORMA, FORMB, FORMC
      WRITE(6,FORMA) X,Y,Z
      WRITE(6,FORMB) X,Y,Z
      WRITE(6,FORMC) X,Y,Z
C
      STOP
      END
```

(σχ. 3 συνέχεια)

Οἱ κάρτες δεδομένων πού διαβάζει τό πρόγραμμα εἶναι :







<u>'Αποτελέσματα :</u>

```
 12.35          0.1000E-05       123.5

12.34567   0.00000   123.46

 0.1234567E 02   0.1000000E-05   0.1234560E 03
```

(σχ. 4)

δ) 'Η ἐντολή WRITE(6,FORMA) X,Y,Z εἶναι ἰσοδύναμη μέ τίς ἐντολές WRITE(6,300) X,Y,Z

300 FORMAT(1H0,3(G11.4,5X))

43 κενοί χαρακτῆρ.

περιέχεται στό FORMA

'Αναλόγως λειτουργεῖ καί ἡ ἐντολή

READ(5,DIA) X,Y,Z,...,κ.τ.λ.

ὅπου DIA εἶναι ἕνα διάνυσμα πού περιέχει τούς κώδικες μέ τούς ὁποίους θέλουμε νά διαβάσωμε τά X,Y,Z,...κ.τ.λ.

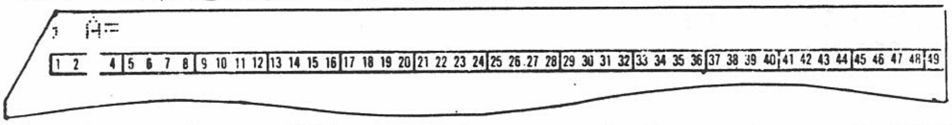
ε) Στήν FORTRAN δέν ἐπιτρέπεται νά ἐφοδιάζωμε μεταβλητές μέ κείμενο χρησιμοποιῶντας τό = . Ἔτσι λ.χ. ἐάν στήν μεταβλητή ALPHA θέλουμε νά δώσωμε τό κείμενο

,bA=

τότε δέν γράφουμε ALPHA=,bA= (δέν ἐπιτρέπεται) ἀλλά χρησιμοποιοῦμε τίς ἐντολές

```
      READ(5,100) ALPHA
  100 FORMAT(A4)
```

καί διαβάζουμε τήν κάρτα



Ἐπίσης ἕνας ἄλλος τρόπος πού ἐπιτρέπει ἡ FORTRAN εἶναι νά χρησιμοποιήσωμε τήν DATA-ἐντολή (δές §10).

```
      DATA ALPHA/,bA=/
```

ζ) Ἐάν οἱ μεταβλητές A,B περιέχουν ἤδη κείμενο π.χ.

τό A περιέχει τό ////
" B " " " *12*

τότε ἡ ἐντολή

```
      A=B
```

ἐπιτρέπεται στήν FORTRAN καί προκαλεῖ μεταβίβαση τοῦ περιεχομένου τῆς B στό A. Τό παλιό περιεχόμενο τῆς A χάνεται. Ἔτσι λ.χ. στό προηγούμενο παράδειγμα μετά τήν ἐκτέλεση τῆς ἐντολῆς A=B τό περιεχόμενο καί τῶν δύο θά εἶναι *12*
Τά A καί B πρέπει νά εἶναι τοῦ ἰδίου τύπου π.χ. INTEGER καί τά δύο ἄλλως προκύπτουν σφάλματα. Ἐν γένει χρειάζεται προσοχή ὥστε ὅλες οἱ μεταβλητές πού ὑπεισέρχονται σέ μιά ἐπεξεργασία κειμένου νά εἶναι τοῦ ἰδίου τύπου.

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα κατασκευάζει μιά πρόχειρη γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως f . Ἡ μέθοδος ἔχει ὡς ἑξῆς: Πρῶτα κατασκευάζεται ἕνας πίνακας τιμῶν τῆς y = f(x) ((X(1),Y(1)),(X(2),Y(2)),...,(X(N),Y(N))) . Κατόπιν ὑπολογίζεται τό ἐλάχιστο YMIN καί μέγιστο YMAX τῶν Y(1),Y(2), ...,Y(N) . Τό διάστημα (YMIN,YMAX) κατανέμεται στούς 100 ἀκεραίους 1,2,3,4,...,98,99,100 ἔτσι ὥστε

στό Y (YMIN,YMAX) νά ἀντιστοιχῆ

ὁ ἀκέραιος K=INT((99/(YMAX-YMIN))*(Y-YMIN)+1.5)

Γιά κάθε Y(I) τοῦ πίνακα ὑπολογίζεται μέ τόν προηγούμενο τύπο τό άντίστοιχο K_i καί τυπώνεται μέ τήν βοήθεια τοῦ διανύσματος TYPOS(100) ἕνα άστέρι στήν K_i-στή θέση μιᾶς γραμμῆς 100 τυπογραφικῶν θέσεων, οἱ ὑπόλοιπες θέσεις τοῦ TYPOS παραμένουν κενές. Ἡ μεταβλητή KENO περιέχει ἕνα κενό τυπογραφικό διάστημα. Μέ τήν έντολή

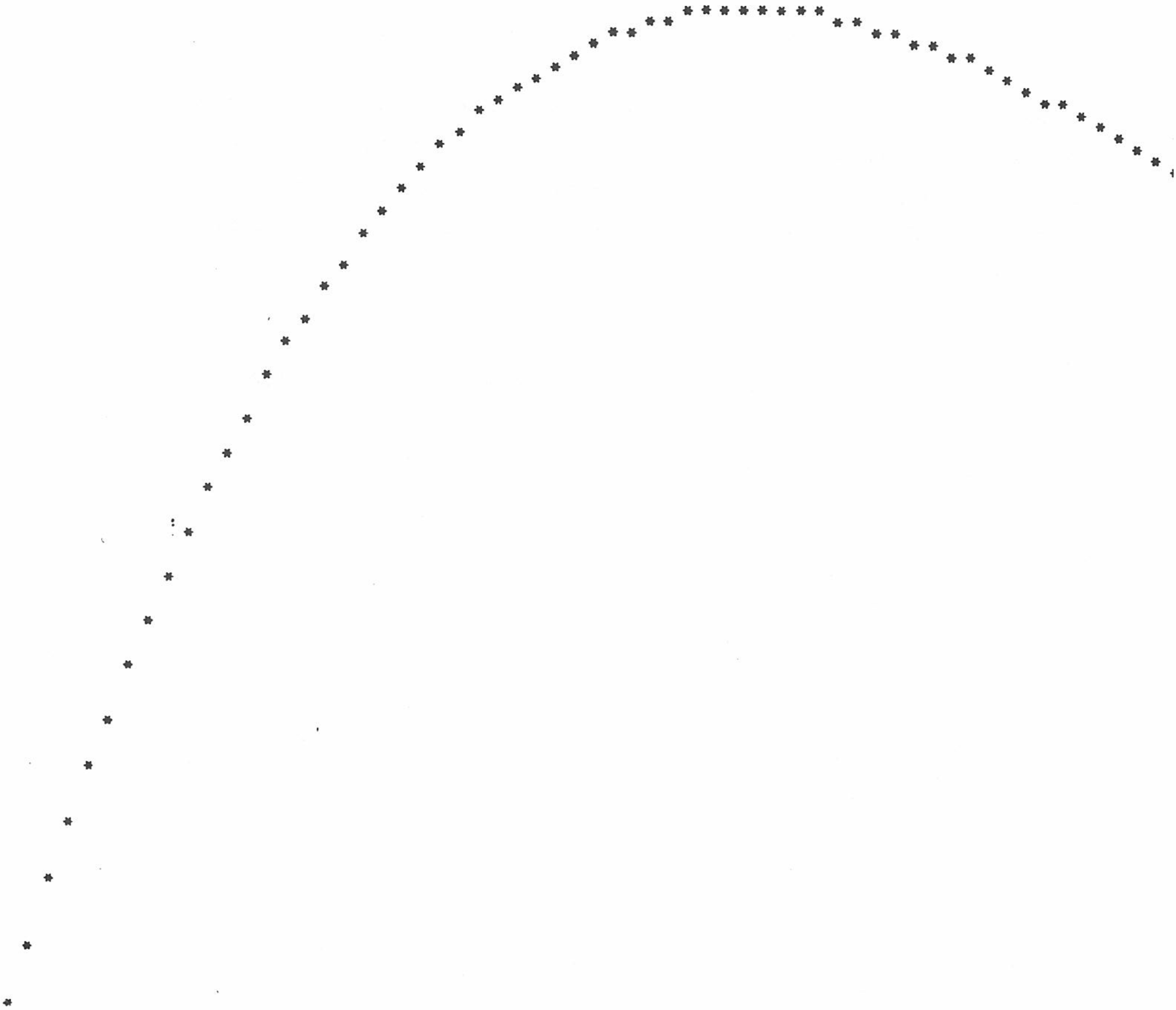
TYPOS(K)=KENO

σβύνουμε τό άστέρι άπ' τήν K-στή θέση καί προετοιμάζουμε τό διάνυσμα TYPOS γιά τήν έκτύπωση τῆς έπομένης γραμμῆς πού άντιστοιχεῖ στό Y(I+1) . Στό έπόμενο πρόγραμμα ἡ συνάρτηση τῆς όποίας κατασκευάζεται ἡ γραφική παράσταση εἶναι ἡ $F(z)=e^{-z}\sin(z)$.

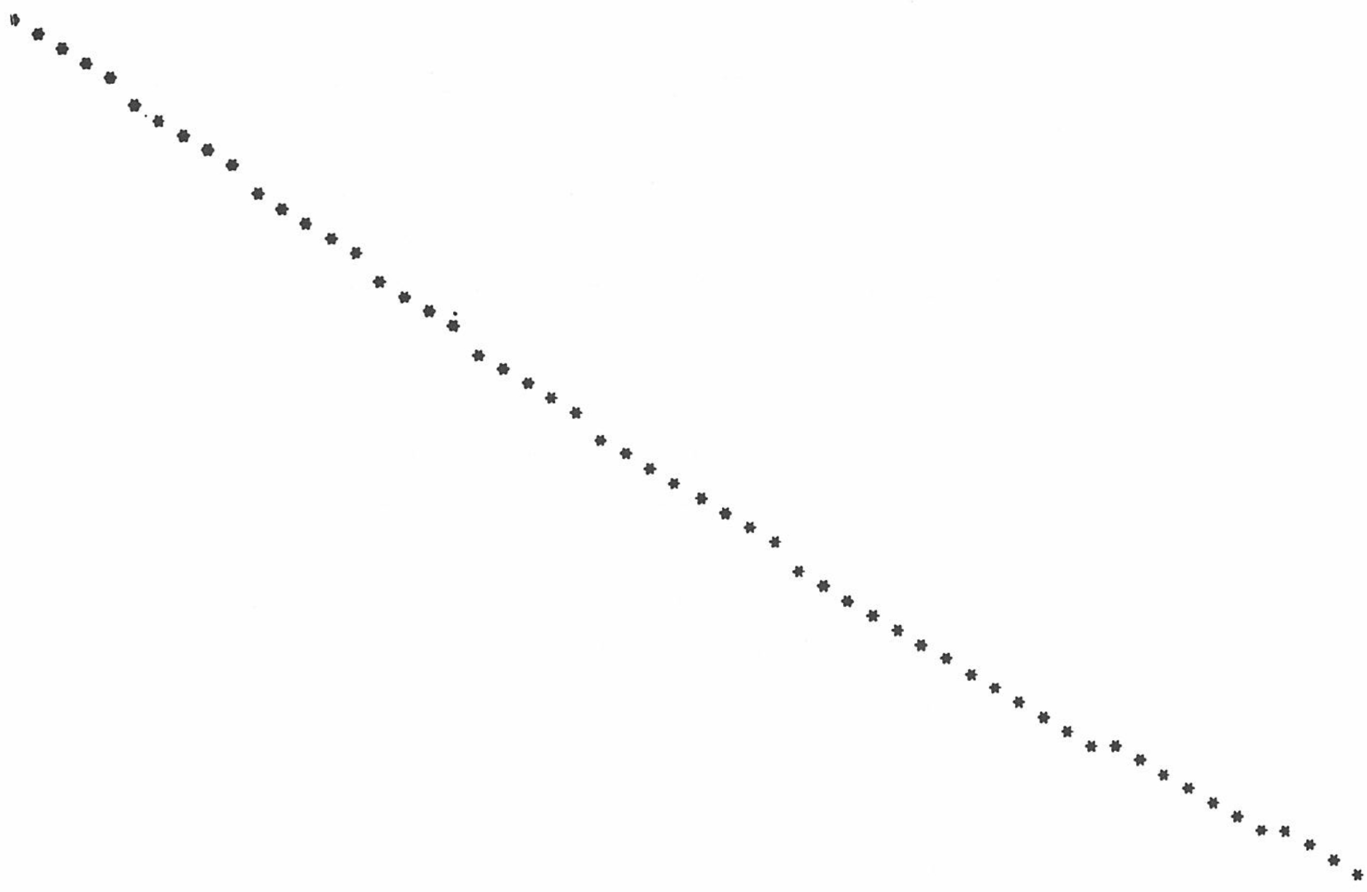
Πρόγραμμα :

```
C  P17.3   GRAFIKES PARASTASEIS SYNARTHSEON MESO  TOY EKTYPOTH
C
      REAL KENO
      DIMENSION  TYPOS(100), X(200), Y(200)
      DATA   TYPOS / 100*1H / , KENO /1H /, ASTERI /1H*/
      F(Z)=EXP(-Z)*SIN(Z)
C
C  YPOLOGISE TA ZEYGH  (X(I),Y(I))
      DO 33 I=1,200
      X(I)=FLOAT(I)*0.02
      Y(I)=F(X(I))
   33 CONTINUE
C
C  YPOLOGISE TO MIN KAI TO MAX TON Y(1),...,Y(200).
      YMAX=Y(1)
      YMIN=Y(1)
      DO 44 I=1,200
      IF(Y(I).GT.YMAX) YMAX=Y(I)
      IF(Y(I).LT.YMIN) YMIN=Y(I)
   44 CONTINUE
C
C  KATANOMH TOY (YMIN,YMAX) SE 100 AKERAIES TIMES
C  KAI EKTYPOSH
      SYNT=99./(YMAX-YMIN)
C
      DO 55 I=1,200
      K = INT(SYNT*(Y(I)-YMIN)+1.5)
C
C  BALE STHN THESH K TOY DIANYSMATOS TYPOS ENA
      TYPOS(K)=ASTERI
      WRITE(6,100) X(I),Y(I),TYPOS
      TYPOS(K)=KENO
   55 CONTINUE
  100 FORMAT(1H ,2HX=,F7.2,3H Y=,F8.3,1X,100A1)
      STOP
      END
```

(σχ. 5)



X= 0.02	Y= 0.020
X= 0.04	Y= 0.038
X= 0.06	Y= 0.056
X= 0.08	Y= 0.074
X= 0.10	Y= 0.090
X= 0.12	Y= 0.106
X= 0.14	Y= 0.121
X= 0.16	Y= 0.136
X= 0.18	Y= 0.150
X= 0.20	Y= 0.163
X= 0.22	Y= 0.175
X= 0.24	Y= 0.187
X= 0.26	Y= 0.198
X= 0.28	Y= 0.209
X= 0.30	Y= 0.219
X= 0.32	Y= 0.228
X= 0.34	Y= 0.237
X= 0.36	Y= 0.246
X= 0.38	Y= 0.254
X= 0.40	Y= 0.261
X= 0.42	Y= 0.268
X= 0.44	Y= 0.274
X= 0.46	Y= 0.280
X= 0.48	Y= 0.286
X= 0.50	Y= 0.291
X= 0.52	Y= 0.295
X= 0.54	Y= 0.300
X= 0.56	Y= 0.303
X= 0.58	Y= 0.307
X= 0.60	Y= 0.310
X= 0.62	Y= 0.313
X= 0.64	Y= 0.315
X= 0.66	Y= 0.317
X= 0.68	Y= 0.319
X= 0.70	Y= 0.320
X= 0.72	Y= 0.321
X= 0.74	Y= 0.322
X= 0.76	Y= 0.322
X= 0.78	Y= 0.322
X= 0.80	Y= 0.322
X= 0.82	Y= 0.322
X= 0.84	Y= 0.321
X= 0.86	Y= 0.321
X= 0.88	Y= 0.320
X= 0.90	Y= 0.318
X= 0.92	Y= 0.317
X= 0.94	Y= 0.315
X= 0.96	Y= 0.314
X= 0.98	Y= 0.312
X= 1.00	Y= 0.310
X= 1.02	Y= 0.307
X= 1.04	Y= 0.305
X= 1.06	Y= 0.302
X= 1.08	Y= 0.300
X= 1.10	Y= 0.297
X= 1.12	Y= 0.294
X= 1.14	Y= 0.291
X= 1.16	Y= 0.287
X= 1.18	Y= 0.284
X= 1.20	Y= 0.281
X= 1.22	Y= 0.277
X= 1.24	Y= 0.274



X= 1.26	Y= 0.270
X= 1.28	Y= 0.266
X= 1.30	Y= 0.263
X= 1.32	Y= 0.259
X= 1.34	Y= 0.255
X= 1.36	Y= 0.251
X= 1.38	Y= 0.247
X= 1.40	Y= 0.243
X= 1.42	Y= 0.239
X= 1.44	Y= 0.235
X= 1.46	Y= 0.231
X= 1.48	Y= 0.227
X= 1.50	Y= 0.223
X= 1.52	Y= 0.218
X= 1.54	Y= 0.214
X= 1.56	Y= 0.210
X= 1.58	Y= 0.206
X= 1.60	Y= 0.202
X= 1.62	Y= 0.198
X= 1.64	Y= 0.194
X= 1.66	Y= 0.189
X= 1.68	Y= 0.185
X= 1.70	Y= 0.181
X= 1.72	Y= 0.177
X= 1.74	Y= 0.173
X= 1.76	Y= 0.169
X= 1.78	Y= 0.165
X= 1.80	Y= 0.161
X= 1.82	Y= 0.157
X= 1.84	Y= 0.153
X= 1.86	Y= 0.149
X= 1.88	Y= 0.145
X= 1.90	Y= 0.142
X= 1.92	Y= 0.138
X= 1.94	Y= 0.134
X= 1.96	Y= 0.130
X= 1.98	Y= 0.127
X= 2.00	Y= 0.123
X= 2.02	Y= 0.119
X= 2.04	Y= 0.116
X= 2.06	Y= 0.113
X= 2.08	Y= 0.109
X= 2.10	Y= 0.106
X= 2.12	Y= 0.102
X= 2.14	Y= 0.099
X= 2.16	Y= 0.096
X= 2.18	Y= 0.093
X= 2.20	Y= 0.090
X= 2.22	Y= 0.087
X= 2.24	Y= 0.083
X= 2.26	Y= 0.081
X= 2.28	Y= 0.078
X= 2.30	Y= 0.075
X= 2.32	Y= 0.072
X= 2.34	Y= 0.069
X= 2.36	Y= 0.067
X= 2.38	Y= 0.064
X= 2.40	Y= 0.061
X= 2.42	Y= 0.059

η) Μέ τήν έντολή

DATA TYPOS/100*1Hb/,KENO/1Hb/,ASTERI/1H*/

έφοδιάζουμε τίς μεταβλητές TYPOS(1),...,TYPOS(100),KENO μέ τό κενό τυπογραφικό διάστημα (b) καί τήν ASTERI μέ τό * Τό TYPOS/100*1Hb/ σημαίνει : έφοδίασε καί τίς 100 μεταβλητές TYPOS(1),...,TYPOS(100) μέ τόν κενό χαρακτήρα. Τήν ίδια έντολή θά μπορούσαμε νά γράψουμε (δές §10)

DATA TYPOS,KENO,ASTERI/101*1Hb,1H*/

Τό έπόμενο πρόγραμμα κατασκευάζει τό ήμερολόγιο ένός οίουδήποτε έτους (1901≤ETOS≤2099) ώς έξής :

1ον) Δίδεται ότι ή 1.1.1980 είναι μιά Τρίτη. Βάσει αύτοῦ τοῦ δεδομένου μποροῦμε νά ύπολογίσωμε τό όνομα τῆς 1.1.ETOS εύρίσκοντας πόσες μέρες μεσολαβοῦν άνάμεσα στήν 1.1.1980 καί 1.1.ETOS ώς έξῆς.

2ον) Τό πλῆθος (=NHM) τῶν ήμερῶν πού μεσολαβοῦν μεταξύ τῶν 1.1.ETOS καί 1.1.1980 δίδεται άπ' τούς τύπους

NHM=(ETOS-1980)*365+(ETOS-1980-1)/4+1 , ETOS>1980

NHM=(1980-ETOS)*365+(1980-ETOS)/4 , ETOS≤1980

3ον) Στά 7 όνόματα τῶν ήμερῶν Δευτέρα,Τρίτη,...,Κυριακή άντιστοιχοῦμε τούς άριθμούς 0,1,2,3,4,5,6 (τά δυνατά ύπόλοιπα τῆς διαιρέσεως μέ τό 7).

4ον) Έπειδή ή 1.1.1980 είναι μιά Τρίτη (=1), τό όνομα (=N11) τῆς 1.1.ETOS θά είναι

N11=MAD(1+NHM,7) έάν ETOS>1980

N11=MAD(1-NHM,7) έάν ETOS≤1980

Έδώ είναι M=MAD(N1,N2) ή συνάρτηση ύποπρόγραμμα, ή όποία γιά δύο άριθμούς N1,N2 (θετικούς) δίδει τό <u>θετικό</u> ύπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ N1 διά τοῦ N2 , έτσι λ.χ.

MAD(5,3) = 2 , 5=1·3+$\underline{2}$

MAD(12,3) = 0 , 12=4·3+$\underline{0}$

MAD(-7,3) = 2 , -7=(-3)·3+$\underline{2}$

MAD(-2,3) = 1 , -2=(-1)·3+$\underline{1}$

MAD(-31,3) = 2 ,-31=(-11)·3+$\underline{2}$

5ον) Ἀφοῦ βροῦμε τό ὄνομα τῆς 1.1.ETOS εὑρίσκουμε τά ὀνόματα τῶν ἡμερῶν, τῶν διαφόρων μηνῶν. Σημαντικό ἐδῶ εἶναι νά ξέρουμε τί μέρα εἶναι ἡ πρώτη κάθε μηνός (=NA) . Γιά τόν Ἰανουάριο λ.χ. ξέρουμε ὅτι NA=N11 . Ἀφοῦ ὑπολογίσουμε τά ὀνόματα τῶν ἡμερῶν τοῦ Ἰανουαρίου, πού δίδονται μέ τόν τύπο:

MAD(NA+I1-1,7) , γιά I1=1,2,...,31 (**)

ὑπολογίζουμε τό NA τοῦ Φεβρουαρίου μέ τόν τύπο:

NA=MAD(NA+31,7)

κατόπιν τά ὀνόματα τῶν ἡμερῶν τοῦ Φεβρουαρίου μέ τόν τύπο (**) κ.ο.κ.

6ον) Κάθε μῆνα τόν ὑπολογίζουμε μέ τόν 33-DO-κύκλο σάν νά εἶχε 31 ἡμέρες. Μετά τόν 33-DO-κύκλο διορθώνουμε τά ἀποτελέσματα καί εὑρίσκουμε τό NA τοῦ ἑπομένου μῆνα. Ἐπειδή οἱ μῆνες ἔχουν 31 ἤ 30 ἤ 28-29 ἡμέρες, πρέπει νά διακρίνουμε τρεῖς περιπτώσεις, ἀναλόγως τοῦ μηνός. Ἡ διακλάδωση ἀναλόγως τοῦ πλήθους τῶν ἡμερῶν ἑνός μηνός γίνεται μέ τό λεγόμενο "ὑπολογιζόμενο GO TO".

7ον) Ἡ δυσκολία στό πρόγραμμα εἶναι νά τυπώσουμε τά ἀποτελέσματα ὑπό μορφή ἡμερολογίου. Τοῦτο ἐπιτυγχάνουμε χρησιμοποιῶντας τίς μεταβλητές μέ δεῖκτες HMEROM(32),MHNES(3,12),MERES(3,8) καί MERA(4,31,12).

Τό HMEROM περιέχει τά νούμερα 1,2,...,31 καί τό b.
Τό MHNES περιέχει τά ὀνόματα τῶν μηνῶν.
Τό MERES περιέχει τά ὀνόματα τῶν ἡμερῶν.
Μέ τό MERA(4,31,12) τυπώνουμε ὁλόκληρο τό ἡμερολόγιο, π.χ. μέ τίς τέσσερεις μεταβλητές

MERA(1,29,7),MERA(2,29,7),MERA(3,29,7),MERA(4,29,7)

τυπώνουμε στήν κατάλληλη θέση τό νούμερο 29 καί τό ὄνομα τῆς 29.7.ETOS .

Πρίν προχωρήσουμε στό πρόγραμμα ἄς ἐξετάσουμε τό ὑπολογιζόμενο GO TO .

θ) Ἡ γενική μορφή τοῦ "ὑπολογιζομένου GO TO" (=computed GO TO) εἶναι :

$$\text{GO TO}(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\ldots,\nu_\kappa),\mu$$

ὅπου $\nu_1,\nu_2,\nu_3,\ldots,\nu_\kappa$ εἶναι μᾶρκες πού ἐμφανίζονται στό πρόγραμμα καί μ εἶναι INTEGER μεταβλητή στήν ὁποία ἔχει δοθῆ προηγουμένως μία ἐκ τῶν τιμῶν 1,2,3,...,κ . Ὅταν κατά τήν ἐκτέλεση τοῦ GO TO αὐτοῦ εἶναι $\mu=i$ τότε ὁ ὑπολογιστής πηδᾶ στήν ἐντολή μέ μάρκα ν_i .

Πρόγραμμα :

```
C   P17.4    KATASKEYH HMEROLOGIOY ENOS OIOYDHPOTE ETOYS
C
C   ETOS     = O ARITHMOS TOY ETOYS POY MAS ENDIAFEREI
C           1901 .LE. ETOS .LE. 2099
      INTEGER       ETOS, HMEROM, DIS
      DIMENSION     HMEROM(32), MHNES(3,12),MERES(3,8),MERA(4,31,12)
C
C
      DATA          ETOS /1981/
      DATA          HMEROM/1H1,1H2,1H3,1H4,1H5,1H6,1H7,1H8,
     1              1H9,2H10,2H11,2H12,2H13,2H14,2H15,2H16,
     2              2H17,2H18,2H19,2H20,2H21,2H22,2H23,2H24,
     3              2H25,2H26,2H27,2H28,2H29,2H30,2H31,1H /
C
      DATA          MHNES/4HIANO,4HYARI,2HOS,4HFEBR,4HOYAR,
     5              3HIOS,4HMART,3HIOS,1H ,
     5                         4HAPRI,4HLIOS,1H ,4HMAIO,1HS,1H ,
     6              4HIOYN,3HIOS,1H ,4HIOYL,3HIOS,1H ,4HAYGO,
     7              4HYSTO,1HS,4HSEPT,4HEMBR,3HIOS,4HOKTO,
     8              4HBRIO,1HS,4HNOEM,4HBRIO,1HS,4HDEKE,4HMBRI,
     9              2HOS/
C
      DATA          MERES/4HDEYT,3HERA,1H ,4HTRIT,1HH,1H ,4HTETA,
     B              3HRTH,1H ,4HPEMP,2HTH,1H ,4HPARA,4HSKEY,1HH,
     C              4HSABB,3HATO,1H ,4HKYRI,3HAKH,1H ,1H ,1H ,1H /
C
C   ****            1-ON  MEROS          ****
C
C   EYRISKOME TO PLHTHOS TON HMERON (=NHM)
C   POY MESOLABOYN ANAMESA STHN 1.1.ETOS  KAI  1.1.1980
C   KAI TO ONOMA THS 1.1.ETOS   (=N11)
      IF (ETOS.LT.1901.OR.ETOS.GT.2099) STOP
      NHM = (ETOS-1980)*365+(ETOS-1980-1)/4+1
      IF(ETOS.LE.1980) NHM=(1980-ETOS)*365+(1980-ETOS)/4
C   OI TELEYTAIOI PROSTHETAIOI EINAI EPI PLEON HMERES APO TA
C   DISEKTA ETH POY MESOLABOYN.
C   EAN N11 EINAI TO ONOMA THS 1.1.ETOS, TOTE EPEIDH TO
C   ONOMA THS 1.1.1980 EINAI  1 (=TRITH) EXOME:
      N11=MAD(NHM+1,7)
      IF(ETOS.LE.1980) N11=MAD(1-NHM,7)
C
C   EINAI TO ETOS DISEKTO,  NAI=DIS=1,  OXI=DIS=0
      DIS=0
      IF(MAD(ETOS,4).EQ.0) DIS=1
C
```

(σχ. 7)

```
C  ****             2-ON  MEROS            ****
C
C  MEXRI TORA XEROME TI MERA EINAI H 1.1.ETOS (=N11), KAI
C  AN TO ETOS EINAI DISEKTO.  ARXIZOME TORA TO GEMISMA TOY
C  MERA(4,31,12).
C  KATHE MERA TOY HMEROLOGIOY THA THN TYPOSOME ME TO MERA
C  P.X. THN 22.7 THA THN TYPOSOME ME TA MERA(1,22,7),...
C  MERA(4,22,7).  STO MERA(1,22,7) PERIEXETAI O ARITHMOS 22
C  STA YPOLOIPA MERA(2,22,7),...,MERA(4,22,7) PERIEXETAI TO
C  ONOMA THS MERAS  P.X.  PARASKEYH = PARA-SKEY-H
C
C  ERGAZOMASTE ANTISTOIXONTAS   0=DEYTERA,  1=TRITH,...,
C  6=KYRIAKH,  7=KENO.
C  NA  =  TO ONOMA THS PROTHS MERAS EKASTOY MHNA
C  GIA TON IANOYARIO MHNA EXOME:
      NA=N11
      DO 44 I2=1,12
         DO 33 I1=1,31
            MERA(1,I1,I2)=HMEROM(I1)
            MB1=MAD(NA+I1-1,7)+1
            DO 313 I13=2,4
 313           MERA(I13,I1,I2)=MERES(I13-1,MB1)
  33     CONTINUE
C  MEXRI EDO EFTIAXAME TON IANOYARIO SOSTA, TORA KANONIZOYME
C  TO NA TOY EPOMENOY MHNA.
C
         GO TO (31,28,31,30,31,30,31,31,30,31,30,31),I2
C
C  OTAN O MHNAS EXEI 31 HMERES TO NA TOY EPOMENOY MHNA EINAI
  31     NA=MAD(NA+31,7)
         GO TO 44
C
C  OTAN O MHNAS EINAI O FEBROYARIOS TOTE ANALOGA AN TO ETOS
C  EINAI DISEKTO  DIS=1, H OXI  DIS=0  EXOME:
  28     NEPO=28+DIS
         NA=MAD(NA+NEPO,7)
C
C  EKTOS AYTOY SBHNOME TIS MERES   NEPO+1,...,31 FEBROYARIOY
         NEPO=NEPO+1
         DO 5 I3=NEPO,31
            MERA(1,I3,I2)=HMEROM(32)
            DO 51 I31=2,4
  51           MERA(I31,I3,I2)=MERES(I31-1,8)
   5     CONTINUE
         GO TO 44
C
C  OTAN O MHNAS EXEI 30 MERES TOTE TO NA TOY EPOMENOY EINAI
  30     NA=MAD(NA+30,7)
C
C  EPISHS SBYNOME THN 31-H MERA TOY MHNOS POY GRAPSAME ME
C                                                   TO 33-DO
         MERA(1,31,I2)=HMEROM(32)
         DO 301 I301=2,4
 301        MERA(I301,31,I2)=MERES(I301-1,8)
  44 CONTINUE
C
```

(σχ. 7 συνέχεια)

```
C  ****              3-ON  MEROS              ****
C  EKTYPOSH TOY HMEROLOGIOY
C  TYPOSE SE TESSERIS SELIDES APO TREIS MHNES SE KATHE MIA.
      DO 511 I6=1,4
         I61=3*(I6-1)+1
         I62=3*(I6-1)+2
         I63=3*I6
         WRITE(6,1000)(MHNES(I,I61),I=1,3)
     1               ,(MHNES(I,I62),I=1,3),(MHNES(I,I63),I=1,3)
         DO 522 I8=1,31
  522       WRITE(6,2000)(MERA(I,I8,I61),I=1,4)
     U                  ,(MERA(I,I8,I62),I=1,4)
     2                  (MERA(I,I8,I63),I=1,4)
  511 CONTINUE
C
 1000 FORMAT(1H1,10X,3(10X,3A4,18X)//)
 2000 FORMAT(1H0,10X,3(9X,A2,3X,3A4,14X))
      STOP
      END
      INTEGER FUNCTION MAD(M,N)
      MP=M/N
       IF(M.LT.0) MP=MP-1
       MAD=M-MP*N
      RETURN
      END
```

<u>'Αποτελεσματα :</u> Δές σελ. 147-150 .

<u>'Ασκήσεις</u>

P17.5 Κατασκεύασε πρόγραμμα τό όποῖο τυπώνει χαρτί ἀλληλογραφίας μέ τό ὄνομα καί τήν διεύθυνσή σου στό πάνω ἀριστερό ἄκρο.

P17.6 'Επανέλαβε τό P17.1 ἀντικαθιστῶντας τό 200 FORMAT μέ τό 200 FORMAT(1H ,5A5), ἐξήγησε τό ἀποτέλεσμα.

P17.7 'Επανέλαβε τό P17.1 ἀντικαθιστῶντας τό 100 FORMAT μέ τό 100 FORMAT(5A5) , ἐξήγησε τό ἀποτέλεσμα.

P17.8 Κατασκεύασε πρόγραμμα τό όποῖο διαβάζει μέ μεταβλητό FORMAT ἕναν τετραψήφιο τό πολύ ἀκέραιο ἀπό τίς 4 πρῶτες στῆλες μιᾶς κάρτας καί τόν τυπώνει.

IANOYARIOS		FEBROYARIOS		MARTIOS	
1	PEMPTH	1	KYRIAKH	1	KYRIAKH
2	PARASKEYH	2	DEYTERA	2	DEYTERA
3	SABBATO	3	TRITH	3	TRITH
4	KYRIAKH	4	TETARTH	4	TETARTH
5	DEYTERA	5	PEMPTH	5	PEMPTH
6	TRITH	6	PARASKEYH	6	PARASKEYH
7	TETARTH	7	SABBATO	7	SABBATO
8	PEMPTH	8	KYRIAKH	8	KYRIAKH
9	PARASKEYH	9	DEYTERA	9	DEYTERA
10	SABBATO	10	TRITH	10	TRITH
11	KYRIAKH	11	TETARTH	11	TETARTH
12	DEYTERA	12	PEMPTH	12	PEMPTH
13	TRITH	13	PARASKEYH	13	PARASKEYH
14	TETARTH	14	SABBATO	14	SABBATO
15	PEMPTH	15	KYRIAKH	15	KYRIAKH
16	PARASKEYH	16	DEYTERA	16	DEYTERA
17	SABBATO	17	TRITH	17	TRITH
18	KYRIAKH	18	TETARTH	18	TETARTH
19	DEYTERA	19	PEMPTH	19	PEMPTH
20	TRITH	20	PARASKEYH	20	PARASKEYH
21	TETARTH	21	SABBATO	21	SABBATO
22	PEMPTH	22	KYRIAKH	22	KYRIAKH
23	PARASKEYH	23	DEYTERA	23	DEYTERA
24	SABBATO	24	TRITH	24	TRITH
25	KYRIAKH	25	TETARTH	25	TETARTH
26	DEYTERA	26	PEMPTH	26	PEMPTH
27	TRITH	27	PARASKEYH	27	PARASKEYH
28	TETARTH	28	SABBATO	28	SABBATO
29	PEMPTH			29	KYRIAKH
30	PARASKEYH			30	DEYTERA
31	SABBATO			31	TRITH

APRILIOS		MAIOS		IOYNIOS	
1	TETARTH	1	PARASKEYH	1	DEYTERA
2	PEMPTH	2	SABBATO	2	TRITH
3	PARASKEYH	3	KYRIAKH	3	TETARTH
4	SABBATO	4	DEYTERA	4	PEMPTH
5	KYRIAKH	5	TRITH	5	PARASKEYH
6	DEYTERA	6	TETARTH	6	SABBATO
7	TRITH	7	PEMPTH	7	KYRIAKH
8	TETARTH	8	PARASKEYH	8	DEYTERA
9	PEMPTH	9	SABBATO	9	TRITH
10	PARASKEYH	10	KYRIAKH	10	TETARTH
11	SABBATO	11	DEYTERA	11	PEMPTH
12	KYRIAKH	12	TRITH	12	PARASKEYH
13	DEYTERA	13	TETARTH	13	SABBATO
14	TRITH	14	PEMPTH	14	KYRIAKH
15	TETARTH	15	PARASKEYH	15	DEYTERA
16	PEMPTH	16	SABBATO	16	TRITH
17	PARASKEYH	17	KYRIAKH	17	TETARTH
18	SABBATO	18	DEYTERA	18	PEMPTH
19	KYRIAKH	19	TRITH	19	PARASKEYH
20	DEYTERA	20	TETARTH	20	SABBATO
21	TRITH	21	PEMPTH	21	KYRIAKH
22	TETARTH	22	PARASKEYH	22	DEYTERA
23	PEMPTH	23	SABBATO	23	TRITH
24	PARASKEYH	24	KYRIAKH	24	TETARTH
25	SABBATO	25	DEYTERA	25	PEMPTH
26	KYRIAKH	26	TRITH	26	PARASKEYH
27	DEYTERA	27	TETARTH	27	SABBATO
28	TRITH	28	PEMPTH	28	KYRIAKH
29	TETARTH	29	PARASKEYH	29	DEYTERA
30	PEMPTH	30	SABBATO	30	TRITH
		31	KYRIAKH		

IOYLIOS		AYGOYSTOS		SEPTEMBRIOS	
1	TETAPTH	1	SABBATO	1	TRITH
2	PFMPTH	2	KYFIAKH	2	TETARTH
3	PARASKEYH	3	DEYTERA	3	PEMPTH
4	SABBATO	4	TRITH	4	PARASKEYH
5	KYRIAKH	5	TETAPTH	5	SABBATO
6	DEYTEPA	6	PEMPTH	6	KYRIAKH
7	TRITH	7	PARASKEYH	7	DEYTERA
8	TETARTH	8	SABBATO	8	TRITH
9	PEMPTH	9	KYRIAKH	9	TETARTH
10	PARASKEYH	10	DEYTERA	10	PEMPTH
11	SABBATO	11	TRITH	11	PARASKEYH
12	KYRIAKH	12	TETARTH	12	SABBATO
13	DEYTERA	13	PEMPTH	13	KYFIAKH
14	TRITH	14	PARASKEYH	14	DEYTERA
15	TETARTH	15	SABBATO	15	TRITH
16	PEMPTH	16	KYRIAKH	16	TETARTH
17	PARASKEYH	17	DEYTERA	17	PEMPTH
18	SABBATO	18	TRITH	18	PARASKEYH
19	KYRIAKH	19	TETARTH	19	SABBATO
20	DEYTERA	20	PEMPTH	20	KYRIAKH
21	TRITH	21	PARASKEYH	21	DEYTERA
22	TETARTH	22	SABBATO	22	TRITH
23	PEMPTH	23	KYRIAKH	23	TETARTH
24	PARASKEYH	24	DEYTERA	24	PEMPTH
25	SABBATO	25	TRITH	25	PARASKEYH
26	KYRIAKH	26	TETARTH	26	SABBATO
27	DEYTERA	27	PEMPTH	27	KYRIAKH
28	TRITH	28	PARASKEYH	28	DEYTERA
29	TETARTH	29	SABBATO	29	TRITH
30	PEMPTH	30	KYRIAKH	30	TETARTH
31	PARASKEYH	31	DEYTERA		

OKTOBRIOS		NOEMBRIOS		DEKEMBRIOS	
1	PEMPTH	1	KYRIAKH	1	TRITH
2	PARASKEYH	2	DEYTERA	2	TETARTH
3	SABBATO	3	TRITH	3	PEMPTH
4	KYRIAKH	4	TETARTH	4	PARASKEYH
5	DEYTERA	5	PEMPTH	5	SABBATO
6	TRITH	6	PARASKEYH	6	KYRIAKH
7	TETARTH	7	SABBATO	7	DEYTERA
8.	PEMPTH	8	KYRIAKH	8	TRITH
9	PARASKEYH	9	DEYTERA	9	TETARTH
10	SABBATO	10	TRITH	10	PEMPTH
11	KYRIAKH	11	TETARTH	11	PARASKEYH
12	DEYTERA	12	PEMPTH	12	SABBATO
13	TRITH	13	PARASKEYH	13	KYRIAKH
14	TETARTH	14	SABBATO	14	DEYTERA
15	PEMPTH	15	KYRIAKH	15	TRITH
16	PARASKEYH	16	DEYTERA	16	TETARTH
17	SABBATO	17	TRITH	17	PEMPTH
18	KYRIAKH	18	TETARTH	18	PARASKEYH
19	DEYTERA	19	PEMPTH	19	SABBATO
20	TRITH	20	PARASKEYH	20	KYRIAKH
21	TETARTH	21	SABBATO	21	DEYTERA
22	PEMPTH	22	KYRIAKH	22	TRITH
23	PARASKEYH	23	DEYTERA	23	TETARTH
24	SABBATO	24	TRITH	24	PEMPTH
25	KYRIAKH	25	TETARTH	25	PARASKEYH
26	DEYTERA	26	PEMPTH	26	SABBATO
27	TRITH	27	PARASKEYH	27	KYRIAKH
28	TETARTH	28	SABBATO	28	DEYTERA
29	PEMPTH	29	KYRIAKH	29	TRITH
30	PARASKEYH	30	DEYTERA	30	TETARTH
31	SABBATO			31	PEMPTH

P17.9 Κατασκεύασε πρόγραμμα τό όποῖο διαβάζει κάρτες δεδομένων οἱ ὁποῖες περιέχουν ἕναν ἀκέραιο N στίς πρῶτες 4 στῆλες καί κείμενο στίς ὑπόλοιπες 76 . Ἐάν ὁ ἀκέραιος $N = 1$ τότε τυπώνεται τό περιεχόμενο τῆς κάρτας καί διαβάζεται ἡ ἐπόμενη κάρτα, ἐάν $N \neq 1$ τότε διαβάζεται ἡ ἐπόμενη κάρτα, ἐάν $N \leqq 0$ τότε τό πρόγραμμα σταματᾶ.

P17.10 Τό προτέρημα τοῦ μεταβλητοῦ FORMAT εἶναι ὅτι μποροῦμε νά διαβάσωμε τούς κώδικές του ἀπό κάρτες δεδομένων καί ἐν συνεχεία νά διαβάσουμε μέ τίς ὁδηγίες αὐτές τίς κάρτες δεδομένων πού ἀκολουθοῦν. Κατασκεύασε πρόγραμμα τό ὁποῖον

1ον) Διαβάζει ἕναν ἀκέραιο N .
2ον) Ἐάν $N \leq 0$ σταματᾶ .
3ον) Ἐάν $N > 0$ ἐφοδιάζει τά διανύσματα DIABAS(15) καί GRAPSE(15) μέ κώδικες ἑνός
4ον) Διαβάζει μέ τό READ(5,DIABAS) καί τυπώνει μέ τό WRITE(6,GRAPSE) N κάρτες δεδομένων .
5ον) Πηγαίνει πάλι στό 1ον).

P17.11 Κατασκεύασε ὑποπρόγραμμα SXHMA(X,Y,N) τό ὁποῖο δοθέντων τῶν διανυσμάτων X(N),Y(N) κατασκευάζει γραφική παράσταση γιά τόν πίνακα τῶν ζευγῶν (X(1),Y(1)),...., (X(N),Y(N)) μέ τόν τρόπο τοῦ P17.3 .

P17.12 Τροποποίησε τό P17.3 ἔτσι ὥστε νά χαράσση ταυτόχρονα μέ τήν γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως καί τόν ἄξονα τῶν x, στήν περίπτωση πού τό 0 περιέχεται στό διάστημα (YMIN,YMAX).

P17.13 Τροποποίησε τό P17.3 ἔτσι ὥστε νά χαράσση ταυτόχρονα τίς γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f(x) καί g(x) . Ἡ γραφική παράσταση τῆς f θέλομε νά τυπώνεται μέ τό * , ἡ δέ γραφική τῆς g μέ τό + . Στά (ἐνδεχόμενα) σημεῖα τομῆς τῶν δύο παραστάσεων θέλομε νά τυπώνεται τό γράμμα T .

P17.14 Τροποποίησε τό πρόγραμμα P17.4 ἔτσι ὥστε νά τυπώνη πάνω ἀπό κάθε μῆνα τό ἔτος τοῦ ὁποίου κατασκεαύζουμε τό ἡμερολόγιο.

P17.15 Τροποποίησε τό P17.14 ἔτσι ὥστε νά τυπώνη τά ἡμερολόγια ὅλων τῶν ἐτῶν μεταξύ τοῦ ETOS1 καί ETOS2. Τά ETOS1, ETOS2 διαβάζει ἀπό μιά κάρτα δεδομένων.

18

ʽΗ ἐντολή COMMON

Δοθέντων N ζευγῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν $(x_1,y_1),\ldots,(x_N,y_N)$ ἀποδεικνύεται ὅτι ὑπάρχει ἕνα καί μόνο πολυώνυμο (N-1) βαθμοῦ

$$P(x)=a_1x^{N-1}+a_2x^{N-2}+\ldots+a_{N-1}x+a_N$$

μέ τήν ἰδιότητα

$$P(x_i)=y_i \quad \text{γιά } i=1,2,\ldots,N\ .$$

Τό πολυώνυμο αὐτό λέγεται "πολυώνυμο παρεμβολῆς τοῦ Lagrange πού διέρχεται ἀπ' τά N σημεῖα $(x_1,y_1),\ldots,(x_N,y_N)$" καί δίδεται ἀπ' τόν τύπο

$$P(x)=y_1L_1(x)+y_2L_2(x)+y_3L_3(x)+\ldots+y_NL_N(x) \qquad (*)$$

ὅπου $L_i(x)$ γιά $i=1,2,\ldots,N$ εἶναι τά ἑξῆς πολυώνυμα

$$L_i(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_N)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_N)}$$

Τό ὑποπρόγραμμα LGRNGE(X,Y,N,Z) τοῦ ἑπομένου προγράμματος ὑπολογίζει τήν τιμή P(Z) τοῦ πολυωνύμου παρεμβολῆς τοῦ Lagrange πού διέρχεται ἀπ' τά N σημεῖα $(x_1,y_1),\ldots,(x_N,y_N)$. Τό ὑποπρόγραμμα ἐπιστρέφει στό κύριο πρόγραμμα τήν τιμή τοῦ πολυωνύμου γιά τόν ἀριθμό Z .

Πρόγραμμα :

```
C   P18.1  POLYONYMO PAREMBOLHS TOY LAGRANGE
C
       REAL   LGRNGE
       DIMENSION  X(10),Y(10)
C
C   DIABASE TO N, TO X KAI TO Y
```

(σχ. 1)

```
      READ(5,100)  N
      READ(5,200)  (X(I),I=1,N)
      READ(5,200)  (Y(I),I=1,N)
      WRITE(6,300) (X(I),I=1,N)
      WRITE(6,300) (Y(I),I=1,N)
      WRITE(6,99999)
C
C  YPOLOGISE KAI TYPOSE THN TIMH TOY POLYONYMOY PAREMBOLHS
C  GIA TA  Z1= 0.03,0.06,0.09,...,3.00
      Z1=-0.03
      DO 11 I=1,101
      Z1=Z1+0.03
      Z2=LGRNGE(X,Y,N,Z1)
      WRITE(6,300)  Z1,Z2
   11 CONTINUE
C
C  TA FORMAT TOY PROGRAMMATOS
  100 FORMAT(I4)
  200 FORMAT(10G8.4)
  300 FORMAT(1H ,10G12.4)
99999 FORMAT(1H0)
      STOP
      END

      REAL FUNCTION LGRNGE(X,Y,N,Z)
      DIMENSION  X(N),Y(N)
      LGRNGE=0.
C
C  O 11-DO-KYKLOS YPOLOGISEI TO ATHROISMA
C  Y(1)*L1(Z)+Y(2)*L2(Z)+...+Y(N)*LN(Z)
      DO 11 I=1,N
      GINOM=Y(I)
            DO 22 J=1,N
C  O 22-DO-KYKLOS YPOLOGISEI TO  LI(Z)
            IF(J.EQ.I) GO TO 22
            GINOM=GINOM*(Z-X(J))/(X(I)-X(J))
   22       CONTINUE
      LGRNGE=LGRNGE+GINOM
   11 CONTINUE
      RETURN
      END
```

(σχ. 1 συνέχεια)

<u>'Αποτελέσματα :</u>

```
0.0000        0.5000        2.000
-1.000        -1.250        1.000


0.0000        -1.000
0.3000E-01    -1.029
0.6000E-01    -1.056
0.9000E-01    -1.082
0.1200        -1.106
0.1500        -1.127
0.1800        -1.148
0.2100        -1.166
```

(σχ. 2)

1.560	-0.1264
1.590	-0.6191E-01
1.620	0.4385E-02
1.650	0.7248E-01
1.680	0.1424
1.710	0.2141
1.740	0.2876
...	....
2.880	4.414
2.910	4.558
2.940	4.704
2.970	4.851
3.000	5.000

(σχ. 2 συνέχεια)

Μιά ἁπλή μέθοδος νά προσεγγίσωμε τήν παράγωγο μιᾶς συναρτήσεως $y=f(x)$ στό σημεῖο x_1 εἶναι νά προσεγγίσωμε τήν συνάρτηση f μέ ἕνα πολυώνυμο παρεμβολῆς τοῦ Lagrange $P(x)$ πού διέρχεται ἀπ' τά ἰσαπέχοντα σημεῖα

$$(x_1, y_1=f(x_1)), (x_2=x_1+h, y_2=f(x_2)), (x_3=x_1+2h, y_3=f(x_3)), \ldots$$

κατόπιν δέ νά ὑπολογίσωμε ἀντί τῆς παραγώγου τῆς f τήν παράγωγο τοῦ $P(x)$ (πού θεωροῦμε σάν προσέγγιση τῆς f) στό σημεῖο x_1. Χρησιμοποιῶντας τόν τύπο (*) ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ παράγωγος τοῦ $P(x)$ στά σημεῖα παρεμβολῆς $x_1, x_2, \ldots$ δίδεται ἀπό τόν ἑξῆς πίνακα.

Πλῆθος σημείων παρεμβολῆς	Παράγωγος στό i-στό σημεῖο παρεμβολῆς	
3	$y_1'=(-3y_1+4y_2-y_3)/(2h)$	(i=1)
	$y_2'=(-y_1+y_3)/(2h)$	(i=2)
	$y_3'=(y_1-4y_2+3y_3)/(2h)$	(i=3)
4	$y_1'=(-11y_1+18y_2-9y_3+2y_4)/(6h)$	(i=1)
	$y_2'=(-2y_1-3y_2+6y_3-y_4)/(6h)$	(i=2)
	$y_3'=(y_1-6y_2+3y_3+2y_4)/(6h)$	(i=3)
	$y_4'=(-2y_1+9y_2-18y_3+11y_4)/(6h)$	(i=4)
5	$y_1'=(-25y_1+48y_2-36y_3+16y_4-3y_5)/(12h)$	(i=1)
	$y_2'=(-3y_1-10y_2+18y_3-6y_4+y_5)/(12h)$	(i=2)
	$y_3'=(y_1-8y_2+8y_4-y_5)/(12h)$	(i=3)
	$y_4'=(-y_1+6y_2-18y_3+10y_4+3y_5)/(12h)$	(i=4)
	$y_5'=(3y_1-16y_2+36y_3-48y_4+25y_5)/(12h)$	(i=5)
6	.... κ.ο.κ.	

Στό ἑπόμενο πρόγραμμα ὑπολογίζουμε μέ τή βοήθεια τοῦ παραπάνω πίνακα τήν παράγωγο τῆς συναρτήσεως $y=x^2$ στά σημεῖα $x_1=0.5$, $x_2=1.0$, $x_3=1.5$, $x_4=2.0$, $x_5=2.5$

Στή συνάρτηση ὑποπρόγραμμα YPARAG(Y,N,H,INDEX) ἀντιστοιχοῦν

N = ἀριθμός σημείων παρεμβολῆς

YTONOS(INDEX) = y'_i

Y(I) = y_i

H = h

Πρόγραμμα :

```
C   P18.2    ARITHMITIKH PARAGOGHSH
C            PARAGOGOS STA SHMEIA PAREMBOLHS
C
      DIMENSION Y(5),YTONOS(5)
      DATA   Y/0.25,1.,2.25,4.,6.25/,H/0.5/
      DO 11 N=3,5
      WRITE(6,100) N
      DO 22 INDEX=1,N
      YTONOS(INDEX)=YPARAG(Y,N,H,INDEX)
   22 WRITE(6,200)   INDEX,YTONOS(INDEX)
   11 CONTINUE
  100 FORMAT(1H0,5X,12HPARAGOGOS ME,I3,18H SHMEIA PAREMBOLHS)
  200 FORMAT(1H0,8X,7HYTONOS(,I2,2H)=,1P1E15.7)
      STOP
      END


      REAL FUNCTION YPARAG(Y,NI,H,IND)
      DIMENSION   Y(NI)
      N2=NI-2
C   ANALOGA ME TO PLHTHOS TON SHMEION PAREMBOLHS PROXORA
C   STO  3 , 4 , 5
C
      GO TO (3,4,5),N2
C
C   ** 3 SHMEIA PAREMBOLHS: **
    3 GO TO (11,22,33),IND
C   PARAGOGOS STO PROTO SHMEIO PARMEBOLHS:
   11 YPARAG=0.5/H*(-3.*Y(1)+4.*Y(2)-Y(3))
      RETURN
C   PARAGOGOS STO DEYTERO SHMEIO PAREMBOLHS
   22 YPARAG=0.5/H*(-Y(1)+Y(3))
      RETURN
C   PARAGOGOS STO TRITO SHMEIO PAREMBOLHS
   33 YPARAG=0.5/H*(Y(1)-4.*Y(2)+3.*Y(3))
      RETURN
C
```

(σχ. 3)

```
C   ** 4 SHMEIA PAREMBOLHS: **
     4 GO TO (111,222,333,444),IND
C   PARAGOGOS STO PROTO SHMEIO PAREMBOLHS...K.T.L....
   111 YPARAG=1./6./H*(-11.*Y(1)+18.*Y(2)-9.*Y(3)+2.*Y(4))
       RETURN
   222 YPARAG=1./6./H*(-2.*Y(1)-3.*Y(2)+6.*Y(3)-Y(4))
       RETURN
   333 YPARAG=1./6./H*(Y(1)-6.*Y(2)+3.*Y(3)+2.*Y(4))
       RETURN
   444 YPARAG=1./6./H*(-2.*Y(1)+9.*Y(2)-18.*Y(3)+11.*Y(4))
       RETURN
C
C   ** 5 SHMEIA PAREMBOLHS: **
     5 GO TO (1111,2222,3333,4444,5555),IND
  1111 YPARAG=1./12./H*(-25.*Y(1)+48.*Y(2)-36.*Y(3)+16.*Y(4)-3.*Y(5))
       RETURN
  2222 YPARAG=1./12./H*(-3.*Y(1)-10.*Y(2)+18.*Y(3)-6.*Y(4)+Y(5))
       RETURN
  3333 YPARAG=1./12./H*(Y(1)-8.*Y(2)+8.*Y(3)-Y(5))
       RETURN
  4444 YPARAG=1./12./H*(-Y(1)+6.*Y(2)-18.*Y(3)+10.*Y(4)+3.*Y(5))
       RETURN
  5555 YPARAG=1./12./H*(3.*Y(1)-16.*Y(2)+36.*Y(3)-48.*Y(4)+25.*Y(5))
       RETURN
       END
```

(σχ. 3 συνέχεια)

<u>'Αποτελέσματα :</u>

```
 PARAGOGOS ME  3 SHMEIA PAREMBOLHS

    YTONOS( 1)=  1.0000000E 00

    YTONOS( 2)=  2.0000000E 00

    YTONOS( 3)=  3.0000000E 00

 PARAGOGOS ME  4 SHMEIA PAREMBOLHS

    YTONOS( 1)=  9.9999970E-01

    YTONOS( 2)=  1.9999990E 00

    YTONOS( 3)=  2.9999990E 00

    YTONOS( 4)=  3.9999990E 00

 PARAGOGOS ME  5 SHMEIA PAREMBOLHS

    YTONOS( 1)=  9.9999970E-01

    YTONOS( 2)=  1.9999990E 00

    YTONOS( 3)=  6.6666650E-01

    YTONOS( 4)=  3.9999990E 00

    YTONOS( 5)=  4.9999980E 00
```

Μιά "διαφορική έξίσωση" (έν συντομία Δ.Ε.) 1ου βαθμοῦ ἔχει τήν γενική μορφή

$$y' = f(x,y)$$

ὅπου f μιά συνεχής συναρτήση δύο μεταβλητῶν π.χ.

$$y' = (x-y)^2+1$$

Λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση $y=g(x)$ εἶναι μιά λύση τῆς Δ.Ε. ὅταν πληροῦται ἡ ἐξίσωση

$$g'(x) = f(x,g(x))$$

Ἕνα "πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν" μιᾶς Δ.Ε. (ἐν συντομία Π.Α.Τ διατυπώνεται ὡς ἑξῆς :

1ον) Δίδεται μιά Δ.Ε. $y'=f(x,y)$ ὅπου f συνεχής στό πεδίο ὁρισμοῦ της $= D$.

2ον) Δίδεται (x_0,y_0) σημεῖο τοῦ D .

3ον) Ζητεῖται μιά λύση $y=g(x)$ τῆς Δ.Ε. μέ τήν ἰδιότητα $g(x_0) = y_0$

Ἔτσι λ.χ.

$$\left.\begin{aligned} y' &= (x-y)^2+1 \\ (x_0,y_0) &= (1.0,0.0) \end{aligned}\right\} \qquad (***)$$

παριστᾶ ἕνα Π.Α.Τ. τοῦ ὁποίου ἡ ἀκριβής λύση εἶναι

$$y = g(x) = x - \frac{1}{x}$$

Οἱ διάφορες μέθοδοι προσεγγιστικῆς λύσεως ἑνός Π.Α.Τ. στηρίζονται στήν κατασκευή ἑνός πίνακα

$x_1=x_0$	x_2	x_3	x_4	...
$y_1=x_0$	y_2	y_3	y_4	...

ἔτσι ὥστε τό y_n νά εἶναι μιά "καλή" προσέγγιση τοῦ $g(x_n)$ ὅπου $y=g(x)$ ἡ ἀκριβής λύση τοῦ Π.Α.Τ.

Μιά ἀπό τίς γνωστότερες μεθόδους προσεγγιστικῆς λύσεως ἑνός Π.Α.Τ. εἶναι ἡ λεγομένη μέθοδος Runge-Kutta κατά τήν ὁποία :

Τό (x_{i+1},y_{i+1}) κατασκευάζεται μέ τήν βοήθεια τοῦ προγουμένου ζεύγους (x_i,y_i) μέσω τῶν τύπων

$$x_{i+1} = x_i + h$$
$$y_{i+1} = y_i + K$$

ὅπου $K = \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$ μέ

$$K_1 = hf(x_i,y_i)$$
$$K_2 = hf(x_i+\tfrac{h}{2},y_i+\tfrac{1}{2}K_1)$$
$$K_3 = hf(x_i+\tfrac{h}{2},y_i+\tfrac{1}{2}K_2)$$
$$K_4 = hf(x_i+\tfrac{h}{2},y_i+K_3)$$

Στό ἑπόμενο πρόγραμμα, ἡ συνάρτηση ὑποπρόγραμμα RUNKUT(X,Y,H,FI) ὑπολογίζει γιά $X=x_i$, $Y=y_i$ τό νέο y_{i+1}

y_{i+1} = RUNKUT(X,Y,H,FI) . Μέ τό πρόγραμμα τυπώνουμε δίπλα στά ζεύγη (x_i, y_i) καί τήν τιμή $g(x_i)=x_i-\frac{1}{x_i}$ τῆς ἀκριβοῦς λύσεως τοῦ Π.Α.Τ. (***) .

Πρόγραμμα :

```
C   P18.3    DIAFORIKES EXISOSEIS
C              H KLASSIKH METHODOS RUNGE KUTTA
C
C
      DIMENSION      X(1000),Y(1000),Y1(1000)
      EXTERNAL    F
      G(X)=X-1./X
C
C   Y1(I)   EINAI H AKRIBHS TIMH G(X(I))
C   Y(I)      EINAI H PROSEGGISH MESO THS
C             METHODOY RUNGE KUTTA
      H=0.01
      X(1)=1.
      Y(1)=0.
      Y1(1)=0.
      DO  11  I = 2,1000
         X(I)=X(I-1)+H
         Y(I)=RUNKUT(X(I-1),Y(I-1),H,F)
         Y1(I)=G(X(I))
   11 CONTINUE
      DO  22  J=1,500
   22 WRITE(6,100) X(J),Y(J),Y1(J),X(500+J),Y(500+J),Y1(500+J)
  100 FORMAT(1H ,2(3F9.5,4X))
      STOP
      END

      REAL FUNCTION RUNKUT(X,Y,H,FI)
      REAL  K,K1,K2,K3,K4
      K1=H*FI(X,Y)
      K2=H*FI(X+H*0.5,Y+K1*0.5)
      K3=H*FI(X+H*0.5,Y+K2*0.5)
      K4=H*FI(X+H,Y+K3)
      K=1./6.*(K1+2.*K2+2.*K3+K4)
      RUNKUT = Y+K
      RETURN
      END
      REAL FUNCTION F(X,Y)
      F=(X-Y)*(X-Y)+1.
      RETURN
      END
```

(σχ. 4)

'Αποτελέσματα :

1.00000	0.00000	0.00000		5.99964	5.83302	5.83296
1.01000	0.01990	0.01990		6.00964	5.84330	5.84324
1.02000	0.03961	0.03961		6.01964	5.85357	5.85351
1.03000	0.05913	0.05912		6.02964	5.86385	5.86379
1.04000	0.07846	0.07846		6.03963	5.87412	5.87406
...	...	...	...			
2.20991	1.75745	1.75741		7.20955	7.07091	7.07084
2.21991	1.76948	1.76944		7.21955	7.08110	7.08104
2.22991	1.78150	1.78146		7.22955	7.09130	7.09123
2.23991	1.79350	1.79346		7.23955	7.10149	7.10142
2.24991	1.80549	1.80545		7.24955	7.11168	7.11161
...	...	...	...			
2.76987	2.40889	2.40884		7.76951	7.64087	7.64080
2.77987	2.42019	2.42014		7.77951	7.65104	7.65097
2.78987	2.43147	2.43143		7.78951	7.66120	7.66113
2.79987	2.44275	2.44271		7.79951	7.67136	7.67129
2.80987	2.45402	2.45398		7.80951	7.68153	7.68146
2.81987	2.46528	2.46524		7.81951	7.69169	7.69162
...	...	...	...			
3.71980	3.45102	3.45097		8.71944	8.60483	8.60475
3.72980	3.46174	3.46169		8.72944	8.61496	8.61488
3.73980	3.47245	3.47241		8.73944	8.62509	8.62501
3.74980	3.48317	3.48312		8.74944	8.63522	8.63515
3.75980	3.49388	3.49383		8.75944	8.64535	8.64527
...	...	...	...			
4.47975	4.25657	4.25652		9.47939	9.37397	9.37389
4.48975	4.26707	4.26702		9.48938	9.38409	9.38400
4.49975	4.27756	4.27751		9.49938	9.39420	9.39411
4.50975	4.28805	4.28800		9.50938	9.40431	9.40422
...	...	...	...			
5.10970	4.91405	4.91400		10.10934	10.01051	10.01042
5.11970	4.92443	4.92438		10.11934	10.02061	10.02052
5.12970	4.93481	4.93476		10.12934	10.03070	10.03061
5.13970	4.94519	4.94514		10.13934	10.04080	10.04071
...	...	...	...			
5.95964	5.79190	5.79184		10.95928	10.86812	10.86803
5.96964	5.80218	5.80212		10.96928	10.87821	10.87811
5.97964	5.81246	5.81240		10.97928	10.88829	10.88820
5.98964	5.82274	5.82268		10.98928	10.89837	10.89828

(σχ. 5)

'Η μέθοδος Runge-Kutta πού ἐξετάσαμε ἀποτελεῖ εἰδική περίπτωση μιᾶς γενικώτερης μεθόδου κατασκευῆς τῶν $(x_1,y_1),\ldots,(x_i,y_i),\ldots$ ἡ ὁποία ἔχει ὡς ἑξῆς :

1ον) Δίδονται δύο διανύσματα καί μιά μήτρα

$(a_1,a_2,\ \ldots\ ,a_m)$

$(b_1,b_2,\ \ldots\ ,b_m)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{3,1} & c_{3,2} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m,1} & c_{m,2} & c_{m,3} & c_{m,4} & \ldots & c_{m,m-1} & 0 \end{pmatrix}$$ δηλ. $c_{i,j}=0$, γιά $j\geq i$

2ον) Τό (x_{i+1}, y_{i+1}) κατασκευάζεται άπ' τό προηγούμενο (x_i, y_i) μέσω τῶν τύπων

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + a_1 K_1 + a_2 K_2 + \ldots + a_m K_m \qquad \text{ὅπου } K_1 = hf(x_i, y_i),$$

$$K_j = hf(x_i + b_j h, y_i + c_{j,1} K_1 + \ldots + c_{j,j-1} K_{j-1})$$

γιά $j = 2, 3, \ldots, m$

Ἔτσι λ.χ. ἡ κλασσική μέθοδος Runge-Kutta τοῦ προηγουμένου προγράμματος ἀντιστοιχεῖ στίς τιμές

$m=4$

$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1/6, 1/3, 1/3, 1/6)$

$(b_1, b_2, b_3, b_4) = (\ 0\ , 0.5, 0.5,\ 1\ )$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα λύνει τό ἴδιο Π.Α.Τ. μέ τό προηγούμενο βάσει τῆς γενικώτερης μεθόδου πού περιγράψαμε. Στήν ἀρχή διαβάζει τό πρόγραμμα τά m, $(a_1, \ldots, a_m)$, $(b_1, \ldots, b_m)$ καί τήν μήτρα C κατόπιν δέ κατασκευάζει διαδοχικά τά $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$ μέ τήν βοήθεια τοῦ ὑποπρογράμματος RNKT . Ἡ ἐντολή COMMON πού χρησιμοποιεῖται μιά φορά στό κύριο πρόγραμμα καί μιά φορά στό ὑποπρόγραμμα χρησιμεύει στό νά κοινοποιηθοῦν τά $(a_1, \ldots, a_m)$, $(b_1, \ldots, b_m)$ καί ἡ μήτρα C (τά ὁποία ὁρίζονται στό κύριο πρόγραμμα) στό ὑποπρόγραμμα RNKT .

<u>Πρόγραμμα :</u>

```
C  P18.4    DIAFORIKES EXISOSEIS
C           GENIKEYSH THS METHODOY RUNGE-KUTTA
C
      DIMENSION A(10),B(10),C(10,10),X(1000),Y(1000),Y1(1000)
      EXTERNAL  F
C
C  ME TO EPOMENO  ** COMMON **  METABIBAZONTAI TA A, B, C
C  (POY DIABAZONTAI STO KYRIO PROGRAMMA), STO YPOPROGRAMMA
      COMMON A,B,C
      G(X)=X-1./X
C
```

(σχ. 6)

```
C  DIABASE KAI TYPOSE TA M, A, B, C
      READ(5,200) M
      READ(5,300)(A(I),I=1,M)
      READ(5,300)(B(I),I=1,M)
      DO 1 I1=1,M
    1 READ(5,300)  (C(I1,J1),J1=1,M)
      WRITE(6,500)  M
      WRITE(6,600)
      WRITE(6,400) (A(I),I=1,M)
      WRITE(6,700)
      WRITE(6,400) (B(I),I=1,M)
      WRITE(6,800)
      DO 33 I=1,M
   33 WRITE(6,400)  (C(I,J),J=1,M)
      WRITE(6,99999)
C
C  Y(I)     EINAI H PROSEGGISH MESO THS GENIKEYMENHS
C           METHODOY RUNGE KUTTA
C  Y1(I)    EINAI H AKRIBHS TIMH G(X(I))
      H=0.01
      X(1)=1.
      Y(1)=0.
      Y1(1)=0.
      DO  11  I = 2,1000
         X(I)=X(I-1)+H
         Y(I)=RNKT(X(I-1),Y(I-1),H,F,M)
         Y1(I)=G(X(I))
   11 CONTINUE
C
      DO  22  J=1,500
   22 WRITE(6,100)X(J),Y(J),Y1(J),X(500+J),Y(500+J),Y1(500+J)
C
  100 FORMAT(1H ,2(3F9.5,4X))
  200 FORMAT(I2)
  300 FORMAT(10E8.1)
  400 FORMAT(1H ,10G11.3)
  500 FORMAT(3H M=,I3)
  600 FORMAT('0  TO DIANYSMA A')
  700 FORMAT('0  TO DIANYSMA B')
  800 FORMAT('0  H MHTRA  C')
99999 FORMAT(1H0)
      STOP
      END

      REAL FUNCTION RNKT(X,Y,H,SYNART,M)
C  DOTHENTOS TOY X(I),Y(I) YPOLOGIZEI TO Y(I+1) ME TH
C  GENIKEYMENH METHODO RUNGE KUTTA
C
      REAL K(10)
      DIMENSION   A(10), B(10), C(10,10)
      COMMON  A, B, C
      K(1)=H*SYNART(X,Y)
C  OTAN M=1 TOTE DEN ORIZONTAI TA K(2),K(3),...
      IF(M.EQ.1) GO TO 222
```

(σχ. 6 συνέχεια)

```
C
C   YPOLOGISMOS TOY EPOMENOY Y BASEI TON K(1),K(2),...
C   KAI TOY A(1),A(2),....
        DO  111  J=2,M
C   YPOLOGISMOS TON K(2),K(3),... ME TON 111-DO-KYKLO
           S=Y
           J1=J-1
           DO   333  JJ=1,J1
  333         S=S+C(J,JJ)*K(JJ)
           Q=X+B(J)*H
           K(J)=H*SYNART(Q,S)
  111   CONTINUE
  222   S=Y
        DO  444  I=1,M
  444   S=S+A(I)*K(I)
        RNKT=S
        RETURN
        END

        REAL FUNCTION F(X,Y)
        F=(X-Y)*(X-Y)+1.
        RETURN
        END
```

(σχ. 6 συνέχεια)

<u>'Αποτελέσματα :</u>

```
M=  2

   TO DIANYSMA A
   0.000         1.00

   TO DIANYSMA B
   0.000         0.500

   H MHTRA   C
   0.000         0.000
   0.500         0.000
```

1.00000	0.00000	0.00000	5.99964	5.83302	5.83296
1.01000	0.01990	0.01990	6.00964	5.84330	5.84324
1.02000	0.03961	0.03961	6.01964	5.85357	5.85351
1.03000	0.05912	0.05912	6.02964	5.86385	5.86379
1.04000	0.07846	0.07846	6.03963	5.87412	5.87406
1.05000	0.09762	0.09761	6.04963	5.88439	5.88433
1.06000	0.11660	0.11660	6.05963	5.89467	5.89461
1.06999	0.13542	0.13541	6.06963	5.90494	5.90488
...	...	...	...	...	...
5.94964	5.78162	5.78156	10.94928	10.85804	10.85795
5.95964	5.79190	5.79184	10.95928	10.86813	10.86803
5.96964	5.80218	5.80212	10.96928	10.87821	10.87811
5.97964	5.81246	5.81240	10.97928	10.88829	10.88820
5.98964	5.82274	5.82268	10.98928	10.89837	10.89828

ἀ) Ὅπως εἴδαμε μέχρι τώρα, ἕνα πρόγραμμα ἀποτελεῖται συνήθως ἀπό διάφορες ἑνότητες (=modules ἤ program units) :

1ον) Τά ὑποπρογράμματα καί

2ον) τό κύριο πρόγραμμα τό ὁποῖο "καλεῖ" τά ὑποπρογράμματα ὁσάκις τά χρειασθῆ.

Κάθε ἑνότητα θεωρεῖται ἀπό τόν ὑπολογιστή σάν ἕνα ἀνεξάρτητο αὐτοτελές πρόγραμμα. Ἀκόμη καί ἄν δύο μεταβλητές σέ δύο <u>διαφορετικές</u> ἑνότητες ἔχουν τό ἴδιο ὄνομα, ὁ ὑπολογιστής τίς θεωρεῖ ἄσχετες μεταξύ τους. Ἐάν λ.χ. ἔλειπε ἀπό τό ὑποπρόγραμμα τοῦ P18.4 ἡ ἐντολή

```
        COMMON  A, B, C
```

τότε τά A(10) τοῦ κυρίου καί τοῦ ὑποπρογράμματος θά ἦταν ἄσχετα μεταξύ τους.

β) Μέ τήν ἐντολή COMMON ἀντιστοιχεῖ ὁ ὑπολογιστής σέ δύο ἤ περισσότερες μεταβλητές πού ἐμφανίζονται σέ δύο <u>διαφορετικές</u> ἑνότητες μία κοινή μνήμη. Μέ τόν τρόπο αὐτό ἀποκαθίσταται μιά ἔμμεση ἐπικοινωνία μεταξύ τῶν δύο ἑνοτήτων. Ἔτσι λ.χ. ἐάν σέ μία ἑνότητα ἀλλάξη ἡ τιμή μιᾶς μεταβλητῆς A καί ἡ μεταβλητή A ἀντιστοιχεῖ μέσω ἑνός COMMON στήν μεταβλητή B μιᾶς ἄλλης ἑνότητος, τότε θά ἀλλάξη ταυτόχρονα καί ἡ τιμή τῆς B, ἔτσι ὥστε οἱ A καί B νά ἔχουν πάντα τήν ἴδια τιμή.

γ) Ἡ γενική μορφή τοῦ COMMON εἶναι

COMMON <u>λιστα</u>

ὅπου <u>λιστα</u> μιά ἀκολουθία ἀπό ὀνόματα μεταβλητῶν π.χ.

```
        REAL   K3                  )
        COMMON  A,B,INTE           )
        .                          )  ἑνότης-α
        .                          )
        .                          )
        END                        )

        SUBROUTINE SYS(X,Y,I)      )
        COMMON  AX,BX,MON          )
        .                          )  ἑνότης-β
        .                          )
        END                        )
```

Μέ τήν ἐντολή COMMON πού ἐμφανίζεται στίς δύο ἑνότητες ἀντιστοιχοῦν :

ἑνότης-α		ἑνότης-β
A	=	AX
B	=	BX
INTE	=	MON

δ) Τό COMMON πού περιγράψαμε λέγεται λευκό (=blanc) COMMON ἐκτός αὐτοῦ ὑπάρχει καί τό λεγόμενο COMMON-μέ-ὄνομα (=labeled COMMON) τό ὁποῖο ἔχει τήν γενική μορφή

COMMON/<u>ονομα</u>/<u>λιστα</u>

π.χ. COMMON/ST3/ X,Y,NHMA,BTA

ὅπου <u>ονομα</u> εἶναι ἐπιτρεπόμενο ὄνομα τῆς FORTRAN (ἀκολουθεῖ τούς κανόνες 1.δ καί 1.ε). Ἡ λειτουργία του εἶναι ἡ ἴδια μέ τήν τοῦ λευκοῦ COMMON .

ε) Κάθε ἑνότης ἑνός προγράμματος μπορεῖ νά περιέχη τό πολύ ἕνα λευκό COMMON . Ἀντιθέτως COMMON-μέ-ὄνομα μποροῦν νά περιέχωνται περισσότερα τοῦ ἑνός σέ κάθε ἑνότητα.

ζ) Καί γιά τά δύο COMMON (blanc καί labeled) ἰσχύει ὁ ἑξῆς περιορισμός :

Μεταβλητές πού ἐμφανίζονται σέ ἕνα COMMON δέν ἐπιτρέπεται νά ἐμφανίζωνται καί σέ μία ἐντολή DATA στήν ἴδια ἑνότητα. Ἔτσι λ.χ. <u>δέν</u> ἐπιτρέπεται νά γράψωμε πρόγραμμα τῆς μορφῆς :

```
DIMENSION  A(10)
COMMON  A,B,X,Y
DATA    A,B,D/10*1.5,3.4,7.2/
.
.
.
```

η) Στήν ἐντολή COMMON δέν ἐπιτρέπεται ἐπίσης νά ἐμφανίζονται τυπικές μεταβλητές ἑνός ὑποπρογράμματος.

θ) Γιά τήν σειρά μέ τήν ὁποία τοποθετοῦνται στήν ἀρχή ἑνός προγράμματος οἱ ἐντολές DIMENSION, DATA, COMMON κ.τ.λ. δές τόν πίνακα 2 στό τέλος τοῦ βιβλίου.

<u>Ἀσκήσεις</u>

P18.5 Ὑπολόγισε τήν τιμή P(Z) τοῦ πολυωνύμου τοῦ Lagrange πού διέρχεται ἀπ' τά σημεῖα (0.5,0),(1,0),(1.5,0), (2,0) γιά τό Z=3.5 .

P18.6 Λύσε μέ τό P18.3 τό Π.Α.Τ. $\begin{cases} y' = y \\ (x_0,y_0)=(0,1) \end{cases}$ καί

P18.7 Μέ τήν βοήθεια τοῦ P18.3 λύσε τά ἐπόμενα Π.Α.Τ.

1ον) $y' = \frac{y+\sqrt{y^2-x^2}}{x}$, $(x_0,y_0)=(1,1)$,
ἀκριβής λύση : $g(x)=(x^2+1)/2$.

2ον) $y' = (x^2-3y)/x$, $(x_0,y_0)=(1,\frac{6}{5})$,
ἀκριβής λύση : $g(x)= x^{-3}+(x^2)/5$.

3ον) $y' = 2x\exp(-x^2)-2xy$, $(x_0,y_0)=(1,1)$,
ἀκριβής λύση : $g(x)=(x^2+1)\exp(-x^2)$.

4ον) $y'=\sin(x)\cos(x)-y\cos(x)$, $(x_0,y_0)=(0,1)$
ἀκριβής λύση : $g(x)= 2\exp(-\sin(x))+\sin(x)-1$.

5ον) $y' = x^2-x^2y$, $(x_0,y_0)=(2,1)$,
ἀκριβής λύση : $g(x)= 1$.

6ον) $y' = -\frac{1}{4}(y^2+4x^{-2})$, $(x_0,y_0)=(1,6)$,
ἀκριβής λύση : $g(x)= 2x^{-1}+4((1+\ln(x))x)^{-1}$.

P18.8 Κατασκεύασε SUBROUTINE RUNKUT(X,Y,N,H,F), ἡ ὁποία γιά δοθέντα H, F καί N ὑπολογίζει (καί ἐπιστρέφει στό κύριο πρόγραμμα) τά (X(1),Y(1)),...,(X(N),Y(N)) μέ τήν μέθοδο Runge-Kutta (ἀνάλογα μέ τήν συνάρτηση RUNKUT τοῦ P18.3).

P18.9 Κατασκεύασε SUBROUTINE RNKT(X,Y,N,H,F), ἡ ὁποία γιά δοθέντα H, F καί N ὑπολογίζει (καί ἐπιστρέφει στό κύριο πρόγραμμα) τά (X(1),Y(1)),...,(X(N),Y(N)) μέ τήν γενικευμένη μέθοδο Runge Kutta (ἀνάλογα μέ τήν συνάρτηση RNKT τοῦ P18.4).

P18.10 Ἡ μέθοδος Kutta-Nyström εἶναι ἐκείνη ἡ γενικευμένη μέθοδος Runge-Kutta (δές προλεγόμενα τοῦ P18.4), γιά τήν ὁποία εἶναι : $m=6$

$A=(\frac{23}{192},0,\frac{125}{192},0,-\frac{81}{192},\frac{125}{192})$, $B=(0,\frac{1}{3},\frac{2}{5},1,\frac{2}{3},\frac{4}{5})$,

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{25} & \frac{6}{25} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{12}{4} & \frac{15}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{81} & \frac{90}{81} & -\frac{50}{81} & \frac{8}{81} & 0 & 0 \\ \frac{6}{75} & \frac{36}{75} & \frac{10}{75} & \frac{8}{75} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιῶντας τό P18.9 λύσε μέ τήν μέθοδο αὐτή τό Π.Α.Τ. τοῦ P18.4 καί σύγκρινε τά ἀποτελέσματα.

P18.11 Κατασκεύασε SUBROUTINE TESTL(X,Y,N,Z1,Z2,M,H,F) ἡ ὁποία γιά δοθέντα X(N), συνάρτηση Y=F(X) καί θετικούς ἀκεραίους N, M

1ον) Ὑπολογίζει τό πολυώνυμο παρεμβολῆς τοῦ Lagrange πού διέρχεται ἀπό τά (X(1),Y(1)= (X(1))),...,(X(N),Y(N)= (X(N))).

2ον) Ὑπολογίζει τίς τιμές Z1(1),...,Z1(M) τῆς F γιά τά σημεῖα X(1),X(1)+H,X(1)+2H,...,X(1)+(M-1)H , καθώς καί τίς τιμές Z2(1),...,Z2(M) τοῦ πολυωνύμου παρεμβολῆς γιά τά ἴδια σημεῖα.

3ον) Ἐπιστρέφει στό κύριο πρόγραμμα τά Z1, Z2 .

P18.12 Ἡ "μέθοδος παραγωγήσεως τοῦ Romberg " ὅπως λέγεται βασίζεται στήν κατασκευή τῆς μήτρας A τοῦ P15.2 τῆς ὁποίας ἡ πρώτη στήλη δίδεται ἀπ' τούς τύπους:

$$\alpha_{1,1}= \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \quad \text{καί ἐν γένει}$$

$$\alpha_{n,1}= \frac{f(x+h_n)-f(x-h_n)}{2h_n} \quad \text{μέ} \quad h_n=h/(2^{n-1})$$

ὁ ἀλγόριθμος διακόπτεται πάλι ὅταν συμβῆ

$$|\alpha_{n-1,n}-\alpha_{n,n}|<\varepsilon$$

τό $\alpha_{n,n}$ παριστᾶ τότε μιά προσέγγιση τῆς παραγώγου τῆς συναρτήσεως f στό σημεῖο x .

Κατασκεύασε SUBROUTINE PRRMB(F,X,H,E) ἡ ὁποία ὑπολογίζει μέ τήν παραπάνω μέθοδο τήν παράγωγο. Ἡ μήτρα πού χρειαζόμεθα στό ὑποπρόγραμμα δίδεται μέ τήν ἐντολή

COMMON/PARRO/ A

Κατασκεύασε καί ἕνα κύριο πρόγραμμα τό ὁποῖο καλεῖ αὐτή τήν SUBROUTINE .

P18.13 Κατασκεύασε ὑποπρόγραμμα τό ὁποῖο δοθέντων τῶν N×N μητρῶν A,B καί ἑνός ἀκεραίου NBHM κατασκευάζει τίς δύο ἀκολουθίες μητρῶν :

$$X^1 = B \quad , \quad Y^1 = A\cdot X^1$$

$$X^2 = X^1\cdot(2\cdot I - Y^1) \quad , \quad Y^2 = A\cdot X^2 \quad \text{καί ἐν γένει}$$

$$X^{\nu+1}= X^{\nu}\cdot(2\cdot I - Y^{\nu}) \quad , \quad Y^{\nu+1}= A\cdot X^{\nu+1}$$

γιά $\nu+1=1,2,3,...,NBHM$.

I συμβολίζει ἐδῶ τήν μοναδιαία μήτρα N διαστάσεων καί τό γινόμενο στούς παραπάνω τύπους εἶναι τό γινόμενο μητρῶν ὅπως τό ὁρίσαμε στήν §9 . Σημείωσε ὅτι ἐάν ἡ μήτρα B ἐκλεγεῖ "κατάλληλα" τότε ἡ ἀκολουθία τῶν μητρῶν $X^1, X^2, X^3, \ldots$ συγκλίνει πρός τήν ἀντίστροφο τῆς μήτρας A (δές P19.1).

P18.14 Τό πρόγραμμα P18.2 περιέχει ἕνα λάθος τό ὁποῖο εὑρίσκεται ἀμέσως, ἄν παρατηρήσωμε προσεκτικά τά ἀποτελέσματά του καί τόν πίνακα τῆς σελ. 155. Ἡ ἄσκηση αὐτή ὑποδεικνύει τόν τρόπο μέ τόν ὁποῖο μποροῦμε νά ἐξετάσουμε ἄν ἕνα πρόγραμμα εἶναι σωστό ἤ λανθασμένο : Τό ἀφήνουμε νά ὑπολογίσῃ μέ δεδομένα γιά τά ὁποῖα γνωρίζουμε τό σωστό ἀποτέλεσμα ἐκ τῶν προτέρων.

19

Ἐφαρμογές ὑποπρογραμμάτων

Προβλήματα μέ μῆτρες

Ἡ ἀντίστροφος μιᾶς τετραγωνικῆς μήτρας

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ .. & .. & ..... & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

εἶναι μιά μήτρα $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ .. & .. & & .. \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix}$ ἔτσι ὥστε νά ἰσχύη:

$$A \cdot B = B \cdot A = I \qquad (1)$$

ὅπου $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ ἡ μοναδιαία μήτρα n-διαστάσεων.

Στόν τύπο (1) τό γινόμενο εἶναι γινόμενο μητρῶν ὅπως τό ὡρίσαμε στήν §9 σελ.55 .

Ἡ ἀντίστροφος μιᾶς μήτρας, δέν ὑπάρχει πάντοτε (δές P6.9)

Μιά σχετικά ἁπλή μέθοδος νά ἐξετάσωμε ἄν ὑπάρχει, καί νά βροῦμε τήν ἀντίστροφο μιᾶς δοθείσας μήτρας A εἶναι ἡ ἑξῆς:

1ον) Στήν μήτρα A ἀντιστοιχοῦμε τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+a_{1,3}x_3+\ldots+a_{1,n}x_n \\ y_2 &= a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+a_{2,3}x_3+\ldots+a_{2,n}x_n \\ .. \; &.. \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \\ y_n &= a_{n,1}x_1+a_{n,2}x_2+a_{n,3}x_3+\ldots+a_{n,n}x_n \qquad (2) \end{aligned}$$

2ον) Τό πρόβλημα τῆς εὑρέσεως τῆς ἀντιστρόφου B τῆς μήτρας A ἰσοδυναμεῖ μέ τό πρόβλημα τῆς ἐπιλύσεως τοῦ (2) "ὡς πρός τά $x_1,x_2,\dots,x_n$". Ἐάν δηλαδή μπορέσουμε καί ἐναλλάξουμε τό ρόλο τῶν x καί y στό (2) καί βροῦμε μιά μήτρα B ἔτσι ὥστε νά ἰσχύη

$$
\begin{array}{l}
x_1 = b_{1,1}y_1+b_{1,2}y_2+b_{1,3}y_3+\dots+b_{1,n}y_n \\
x_2 = b_{2,1}y_1+b_{2,2}y_2+b_{2,3}y_3+\dots+b_{2,n}y_n \\
\cdot\cdot \quad \cdot\cdot \quad \cdot\cdot \quad \cdot\cdot \quad \cdot\cdot \quad \cdot\cdot \\
x_n = b_{n,1}y_1+b_{n,2}y_2+b_{n,3}y_3+\dots+b_{n,n}y_n
\end{array}
\tag{3}
$$

γιά κάθε $(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $(y_1,y_2,\dots,y_n)$ πού πληροῖ τήν (2), τότε ἡ μήτρα B εἶναι ἡ ἀντίστροφος τῆς δοθείσης A .

3ον) Τήν μετάβαση ἀπό τήν δοθεῖσα A στήν ἀντίστροφο τῆς B ἐκτελοῦμε σέ n διαδοχικά βήματα. Σέ κάθε βῆμα ἐναλλάσουμε τόν ρόλο ἑνός x καί ἑνός y ὡς ἑξῆς (Γιά λόγους καλύτερης ἐποπτείας γράφουμε τήν (2) :

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4\dots & x_\kappa\dots & x_n \\
\hline
y_1 & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,\kappa} & a_{1,n} \\
y_2 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,\kappa} & a_{2,n} \\
y_3 & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,\kappa} & a_{3,n} \\
\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\
y_\lambda & a_{\lambda,1} & a_{\lambda,2} & a_{\lambda,3} & a_{\lambda,4} & \boxed{a_{\lambda,\kappa}} & a_{\lambda,n} \\
\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\
y_n & a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & a_{n,4} & a_{n,\kappa} & a_{n,n}
\end{array}
\tag{4}
$$

ἐπίσης γιά λόγους πού θά φανοῦν ἀργότερα θεωροῦμε τά διανύσματα

$(L(1),L(2),\dots,L(n))$ καί $(K(1),K(2),\dots,K(n))$

στά ὁποῖα δίδομε ἀρχικά τήν τιμή 0 γιά ὅλες τίς συνιστῶσες τους.):

4ον) <u>Πρῶτο βῆμα :</u> Εὑρίσκομε ἕνα ζεῦγος δεικτῶν (λ,κ) ἔτσι ὥστε

$$a_{\lambda,\kappa} \neq 0$$

καί λύνουμε τήν λ-ἐξίσωση ὡς πρός x_κ :

$$x_\kappa = \frac{1}{a_{\lambda,\kappa}}y_\lambda - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq\kappa}}^{n} \frac{a_{\lambda,i}}{a_{\lambda,\kappa}}x_i \tag{5}$$

θέτοντας ταυτόχρονα $L(\lambda)=\kappa$, $K(\kappa)=\lambda$

5ον) Ἀντικαθιστοῦμε τό x στίς ἄλλες ἐξισώσεις ὁπότε τό (4) μετασχηματίζεται στό

	x_1	x_2	$\ldots\ x_{\kappa-1}$	y_λ	$x_{\kappa+1} \ldots x_n$	
y_1	$a_{1,1}-a_{1,\kappa}\dfrac{a_{\lambda,1}}{a_{\lambda,\kappa}}$	$a_{1,2}-a_{1,\kappa}\dfrac{a_{\lambda,2}}{a_{\lambda,\kappa}}$	$\ldots$	$\dfrac{a_{1,\kappa}}{a_{\lambda,\kappa}}$	..	..
y_2	$a_{2,1}-a_{2,\kappa}\dfrac{a_{\lambda,1}}{a_{\lambda,\kappa}}$	$a_{2,2}-a_{2,\kappa}\dfrac{a_{\lambda,2}}{a_{\lambda,\kappa}}$	$\ldots$	$\dfrac{a_{2,\kappa}}{a_{\lambda,\kappa}}$	..	..
.						
.						
$y_{\lambda-1}$	..	..	..			..
x_κ	$(-\dfrac{a_{\lambda,1}}{a_{\lambda,\kappa}})$	$(-\dfrac{a_{\lambda,2}}{a_{\lambda,\kappa}})$		$\dfrac{1}{a_{\lambda,\kappa}}$	..	..
$y_{\lambda+1}$	..	..	..			..
.						
.						
y_n	$a_{n,1}-a_{n,\kappa}\dfrac{a_{\lambda,1}}{a_{\lambda,\kappa}}$	$a_{n,2}-a_{n,\kappa}\dfrac{a_{\lambda,2}}{a_{\lambda,\kappa}}$	..	$\dfrac{a_{n,\kappa}}{a_{\lambda,\kappa}}$	..	..

.....(6)

6ον) <u>Τά ὑπόλοιπα βήματα :</u> Ὅπως φαίνεται στό (6), μέ τό πρῶτο βῆμα ἐναλλάξαμε τό ρόλο τῶν x_κ καί y_λ Τήν μήτρα τοῦ (6) πού προέκυψε ἀπ' τήν ἐναλλαγή αὐτή τήν ὀνομάζουμε πάλι A. Στήν νέα A παίρνουμε τώρα δύο δεῖκτες (λ,κ) ἔτσι ὥστε

$$\left.\begin{array}{l} a_{\lambda,\kappa} \neq 0 \\ \text{καί} \quad L(\lambda)=0,\ K(\kappa)=0 \ . \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Σημείωσε ὅτι ἡ τελευταία συνθήκη ἐξασφαλίζει ὅτι τά νέα λ, κ εἶναι διαφορετικά τῶν λ,κ τοῦ προηγουμένου βήματος. Ἐπαναλαμβάνομε τώρα τήν διαδικασία τοῦ 4ον), 5ον) μέ τήν νέα A, ὁπότε καταλήγουμε πάλι σέ μιά μήτρα τῆς μορφῆς (6) στήν ὁποία ἔχουν ἐναλλαγεῖ οἱ ρόλοι <u>δύο</u> x μέ <u>δύο</u> y . Τήν προκύπτουσα μήτρα ὀνομάζουμε πάλι A. Στήν νέα A εὑρίσκουμε πάλι δύο δεῖκτες λ,κ πού πληροῦν τίς συνθῆκες (7) παραπάνω, ἐκτελοῦμε πάλι τίς διαδικασίες τοῦ 4ον), 5ον), ὁπότε καταλήγουμε πάλι σέ μιά μήτρα τῆς μορφῆς (6) τήν όποία όνομάζουμε πάλι A κ.ο.κ.

7ον) <u>Ἔλεγχος :</u> Μέ τόν τρόπο αὐτό προχωροῦμε μέχρι νά έναλλάξουμε τούς ρόλους ὅλων τῶν x μέ ὅλα τά y . Στό ν-στό βῆμα ἔχουν έναλλαγή (ν-1) τό πλῆθος x μέ (ν-1) τό πλῆθος y καί προχωροῦμε στήν έναλλαγή ἑνός ἀκόμη x μέ ἕνα y . Γιά τόν σκοπό αὐτό πρέπει στήν μήτρα A πού ἔχουμε έκείνη τήν στιγμή νά βροῦμε ἕνα στοιχεῖο $a_{\lambda,\kappa}$ πού πληροῖ τίς συνθῆκες τοῦ (7). Ὑπάρχουν δύο δυνατότητες :

I) Ἐάν ὑπάρχει τέτοιο $a_{\lambda,\kappa}$ τότε προχωροῦμε πάλι έκτελῶντας τίς διαδικασίες τοῦ 4ον),5ον) κ.τ.λ.

II) Ἐάν δέν ὑπάρχει $a_{\lambda,\kappa}$ τό ὁποῖο νά πληροῖ τίς συνθῆκες τοῦ (7), τότε ἡ ἀρχική μήτρα A δέν ἀντιστρέφεται .

8ον) <u>Ἀποτέλεσμα :</u> Ἐάν ὁ ἀλγόριθμος δέν σταματήσει λόγω τοῦ 7ον)-II, τότε μετά ἀπό n-βήματα θά ἔχουν έναλλαγεῖ ὅλα τά x μέ ὅλα τά y καί ἡ παροῦσα μήτρα A θά εἶναι τῆς μορφῆς :

$$\begin{array}{c|cccccc} & y_{K(1)} & y_{K(2)} & y_{K(3)} & \cdots & \cdots & y_{K(n)} \\ \hline x_{L(1)} & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ x_{L(2)} & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdot\cdot \\ x_{L(n)} & a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{array} \qquad (8)$$

Ἡ ἀντίστροφος τῆς ἀρχικῶς δοθείσης μήτρας A προκύπτει ἀπ' τήν A τοῦ (8) δι' ἀνακατατάξεως τῶν στοιχείων της.

$$b_{i,j} = a_{L(i),K(j)} \qquad (9)$$

<u>Πρόγραμμα :</u>

```
C   P19.1    ANTISTROFH MHTRAS
C
      DIMENSION  A(10,10),B(10,10),L(10),K(10),AANT(10,10)
      NA=10
C
C   DIABASE THN A
      READ(5,100)   N
      DO 11 I=1,N
   11 READ(5,200)   (A(I,J),J=1,N)
```

(σχ. 1)

```
C
C   BRES THN ANTISTROFO AANT THS A
       CALL ANTIST(A,N,L,K,B,AANT,MARKA,NA)
       IF(MARKA.EQ.0) GO TO 111
C
C   TYPOSE THN A KAI THN ANTISTROFO
       WRITE(6,500)
       DO 22 I=1,N
    22 WRITE(6,300)    (A(I,J),J=1,N)
       WRITE(6,600)
       DO 33 I=1,N
    33 WRITE(6,300)   (AANT(I,J),J=1,N)
       GO TO 222
   111 WRITE(6,400)
C
C   TA FORMAT TOY PROGRAMMATOS
   100 FORMAT(I4)
   200 FORMAT(10F8.3)
   300 FORMAT(1H0,2X,10G13.5)
   400 FORMAT(1H0,33H****H MHTRA DEN ANTISTREFETAI****)
   500 FORMAT(25H0***** H MHTRA A *****        )
   600 FORMAT(41H0***** H ANTISTROFOS THS MHTRAS  A *****     )
   222 STOP
       END

       SUBROUTINE ANTIST(A,N,L,K,B,AANT,MARKA,NA)
C   H SUBROUTINE AYTH EYRISKEI THN ANTISTROFO THS MHTRAS A
C   NA      =  MEGISTH DIASTASH MHTRON TOY KYRIOY PROGRAMMATOS
C   N       =  DIASTASH DIDOMENHS MHTRAS
C   AANT    =  ANTISTROFOS THS A
C   B       =  BOHTHITIKH MHTRA, XRHSIMEYEI GIA NA MHN DIAGRAFH
C              H ARXIKH A.  STHN ARXH TOY PROGRAMMATOS
C              (ME TON 44-DO-KYKLO) TITHETAI B=A.  STO TELOS
C              META THN EKTELESH TON N BHMATON TITHETAI
C              AANT= ANADIATAXH THS B (7-DO-KYKLOS)
C   MARKA   =  PAIRNEI THN TIMH 1 OTAN H A ANTISTREFETAI,
C              ALLOS MARKA=0
C   L, K    =  BOHTHITIKA DIANYSMATA ME TA OPOIA ANADIATASSOYME
C              THN B META THN EKTELESH TON N BHMATON
       DIMENSION A(NA,NA),B(NA,NA),L(N),K(N),AANT(NA,NA)
C
C   ARXIKES TIMES STA L,K,B KAI MARKA
       DO 33 IMHD=1,N
          K(IMHD)=0
    33    L(IMHD)=0
       MARKA=1
       DO 44 IARX=1,N
          DO 44 JARX=1,N
    44       B(IARX,JARX)=A(IARX,JARX)
C
C   EKTELESH TON N BHMATON:
       DO 55 NBHMA=1,N
          TMAX=0.0
C
```

(σχ. 1 συνέχεια)

```
C   ME TON 22-DO-KYKLO EYRISKOME TO MEGISTO KAT APOLYTO TIMH
C   STOIXEIO TON STHLON I THS A KAI TON GRAMMON J THS A GIA
C   TIS OPOIES ISXYEI  L(I)=0, K(J)=0.  TOYTO TO MEGISTO
C   SYMBOLIZOME ME TMAX,  LAMDA KAPA EINAI OI DEIKTES GIA
C   TOYS OPOIOYS  ABS(B(LAMDA,KAPA))=TMAX
          DO  22  IGR=1,N
              IF(L(IGR).NE.0) GO TO 22
              DO 11 IKOL=1,N
                  IF(K(IKOL).NE.0) GO TO 11
                  IF(ABS(B(IGR,IKOL)).LE.TMAX) GO TO 11
                  TMAX=ABS(B(IGR,IKOL))
                  LAMDA=IGR
                  KAPA=IKOL
   11         CONTINUE
   22     CONTINUE
C
C   EAN TMAX=0  TOTE H MHTRA DEN ANTISTREFETAI
          IF(TMAX.EQ.0.0) GO TO 66
C
C   ETOIMASIA TON L KAI K GIA TO EPOMENO BHMA
C   ME TIS EPOMENES ENTOLES KANONIZOME ETSI OSTE STHN TELIKH B
C   B(L(I),K(J)) NA DIDEI TO  AANT(I,J) STOIXEIO THS ANTISTROFOY
C   (DES TON 7-DO-KYKLO)
          L(LAMDA)=KAPA
          K(KAPA)=LAMDA
C
C   KATASKEYH THS NEAS B APO THN PALIA B
          BOH=B(LAMDA,KAPA)
          DO  1  I=1,N
              IF(I.EQ.LAMDA) GO TO 1
              DO 3 J=1,N
                  IF(J.EQ.KAPA) GO TO 3
                  B(I,J)=B(I,J)-B(I,KAPA)*B(LAMDA,J)/BOH
    3         CONTINUE
    1     CONTINUE
          DO 2 M2=1,N
              B(LAMDA,M2)=-B(LAMDA,M2)/BOH
              IF(M2.EQ.KAPA) B(LAMDA,M2)=1./BOH
              IF(M2.EQ.LAMDA) GO TO 2
              B(M2,KAPA)=B(M2,KAPA)/BOH
    2     CONTINUE
   55 CONTINUE
      DO 7 I=1,N
          DO 7 J=1,N
    7         AANT(I,J)=B(L(I),K(J))
      RETURN
   66 MARKA = 0
      RETURN
      END
```

(σχ. 1 συνέχεια)

<u>Ἀποτελέσματα :</u>

***** H MHTRA A *****

7.0000	2.0000	-8.0000	3.0000	5.0000
-2.0000	1.0000	6.0000	-4.0000	1.0000
8.0000	-6.0000	2.0000	5.0000	-6.0000
-3.0000	4.0000	-5.0000	1.0000	2.0000
-5.0000	-1.0000	6.0000	-2.0000	3.0000

***** H ANTISTROFOS THS MHTRAS A *****

.73715E-01	.13094	.38409E-01	-.29486E-01	-.70029E-01
.22308E-01	.36857	.17478	.39108	-.71193E-01
.21338E-01	.22211	.15849	.19146	.79728E-01
.27158E-01	.10087	.25626	.38914	.17420
.10572	-.35887E-01	-.23860E-01	-.42289E-01	.14956

(σχ. 2)

Ἕνα πρόβλημα πού συνδέεται στενά μέ τήν ἀντιστροφή μιᾶς τετραγωνικῆς μήτρας εἶναι καί ἡ λύση ἑνός συστήματος n γραμμικῶν ἐξισώσεων μέ n ἀγνώστους. Σ' αὐτό δίδεται μιά μήτρα A καί ἕνα διάνυσμα B

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ .. & .. & \cdots & .. \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_n \end{pmatrix} \tag{10}$$

καί ζητεῖται ἕνα διάνυσμα $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ τό ὁποῖον πληροῖ τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων

$$\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n \end{array} \tag{11}$$

Ἡ μέθοδος ἀπαλοιφῆς τοῦ Gauss πού περιγράφουμε παρακάτω χωρίζεται σέ δύο μέρη. Στό πρῶτο μέρος ἀνάγεται τό σύστημα (11) σέ ἕνα ἰσοδύναμο "τριγωνικό", δηλαδή σέ ἕνα σύστημα τῆς μορφῆς

$$\begin{array}{rcl}
a'_{1,1}x_1+a'_{1,2}x_2+a'_{1,3}x_3+a'_{1,4}x_4+ \ldots +a'_{1,n}x_n &=& b'_1 \\
a'_{2,2}x_2+a'_{2,3}x_3+a'_{2,4}x_4+ \ldots +a'_{2,n}x_n &=& b'_2 \\
a'_{3,3}x_3+a'_{3,4}x_4+ \ldots +a'_{3,n}x_n &=& b'_3 \\
a'_{4,4}x_4+ \ldots +a'_{4,n}x_n &=& b'_4 \\
\ldots \quad \ldots &&\ldots \\
a'_{n,n}x_n &=& b'_n
\end{array} \qquad (12)$$

Στό δεύτερο μέρος λύνεται τό τριγωνικό σύστημα (12) . 'Η μέθοδος ἀναγωγῆς τοῦ (11) στό τριγωνικό σύστημα (12) γίνεται σέ (n-1) διαδοχικά βήματα ὡς ἑξῆς :

1ον) Εὑρίσκουμε τό μέγιστο κατ' ἀπόλυτον τιμή στοιχεῖο τῆς πρώτης κολώνας τῆς A, ἔστω $a_{\lambda,1}$ καί θέτομε nplin=1 (τό nplin τό χρειαζόμαστε ἀργότερα γιά τήν εὕρεση τῆς ὀρίζουσας τοῦ συστήματος). 'Εάν $a_{\lambda,1}=0$, τό σύστημα δέν λύνεται (ἔχει ὀρίζουσα 0) ἐν γένει .

2ον) 'Εναλλάσουμε τήν 1-η μέ τήν λ-στή ἐξίσωση καί θέτουμε nplin = nplin·(-1) .

3ον) Στό προκύπτον σύστημα ἀντικαθιστοῦμε τήν κ-στή ἐξίσωση μέ τήν

$$(\kappa\text{-στή ἐξίσωση}) - \frac{a_{\kappa,1}}{a_{\lambda,1}}(1\text{-τη ἐξίσωση})$$

γιά $\kappa = 2,3,4,\ldots,n$.

Τό σύστημα πού προκύπτει μετά τά τρία αὐτά βήματα ἔχει τήν μορφή

$$\begin{array}{rcl}
a'_{1,1}x_1+a'_{1,2}x_2+a'_{1,3}x_3+ \ldots +a'_{1,n}x_n &=& b'_1 \\
a'_{2,2}x_2+a'_{2,3}x_3+ \ldots +a'_{2,n}x_n &=& b'_2 \\
a'_{3,2}x_2+a'_{3,3}x_3+ \ldots +a'_{3,n}x_n &=& b'_3 \\
\ldots \quad \ldots \quad\quad \ldots &&\ldots \\
a'_{n,2}x_2+a'_{n,3}x_3+ \ldots +a'_{n,n}x_n &=& b'_n
\end{array} \qquad (13)$$

'Επαναλάμβανοντας τά τρία βήματα 1ον),2ον) καί 3ον) γιά τό σύστημα (13) παίρνουμε τό ἰσοδύναμο πρός τό ἀρχικό σύστημα

$$
\begin{array}{l}
a'_{1,1}x_1+a'_{1,2}x_2+a'_{1,3}x_3+a'_{1,4}x_4+ \ldots +a'_{1,n}x_n = b'_1 \\
\quad a''_{2,2}x_2+a''_{2,3}x_3+a''_{2,4}x_4+ \ldots +a''_{2,n}x_n = b''_2 \\
\qquad a''_{3,3}x_3+a''_{3,4}x_4+ \ldots +a''_{3,n}x_n = b''_3 \\
\qquad .. \quad .. \quad .. \quad .. \\
\qquad a''_{n,3}x_3+a''_{n,4}x_4+ \ldots +a''_{n,n}x_n = b''_n
\end{array}
\qquad (14)
$$

'Εξακολουθῶντας κατά τόν ἴδιο τρόπο μέ τό (14) καταλήγουμε μετά ἀπό n-1 συνολικά βήματα σέ ἕνα ἰσοδύναμο τριγωνικό σύστημα τῆς μορφῆς (12) .

Τό τριγωνικό σύστημα (12) λύνεται ὡς πρός τά x τότε καί μόνον, ὅταν ὅλα τά διαγώνια στοιχεῖα του

$a'_{1,1}$,$a'_{2,2}$,$a'_{3,3}$ ..., $a'_{n,n}$ εἶναι διάφορα τοῦ 0.

Οἱ ἐξισώσεις τοῦ (12) λύνονται ἀπό κάτω πρός τά πάνω

$$
\begin{array}{l}
x_n = b_n/a_{n,n} \\
x_{n-1} = (b_{n-1}-a_{n-1,n}x_n)/a_{n-1,n-1} \\
x_{n-2} = (b_{n-2}-a_{n-2,n-1}x_{n-1}-a_{n-2,n}x_n)/a_{n-2,n-2} \\
.. \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \\
x_k = (b_k-a_{k,k+1}x_{k+1}- \ldots -a_{k,n}x_n)/a_{n,n}
\end{array}
\qquad (15)
$$

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα λύνει ἕνα γραμμικό σύστημα μέ τή μέθοδο πού περιγράψαμε. 'Η SUBROUTINE TRIGON ἀνάγει τό σύστημα σέ ἕνα ἰσοδύναμο τριγωνικό. 'Η SUBROUTINE LYSTR λύνει ἕνα τριγωνικό σύστημα μέ τήν μέθοδο τῶν ἰσοτήτων τοῦ (15) .

Πρόγραμμα :

```
C  P19.2  ANAGOGH SYSTHMATOS SE ISODYNAMO TRIGONIKO
C
      DIMENSION   A(10,10),B(10),ATONOS(10,10),BTONOS(10),X(10)
      DIMENSION SXOLIO(20)
      NA=10
C
C  TO DOTHEN SYSTHMA
      READ(5,9)  SXOLIO
      WRITE(6,9)  SXOLIO
      READ(5,100) N
```

(σχ. 3)

```
      DO 1 I1=1,N
    1 READ(5,200) (A(I1,J1),J1=1,N)
      DO 2 I2=1,N
    2 WRITE(6,300)  (A(I2,J2),J2=1,N)
      WRITE(6,99999)
      READ(5,200) (B(I),I=1,N)
      WRITE(6,300) (B(I),I=1,N)
C
C  ISODYNAMO TRIGONIKO
      CALL TRIGON(A,B,ATONOS,BTONOS,NPLIN,N,NA)
      READ(5,9)  SXOLIO
      WRITE(6,9)  SXOLIO
      DO 3 I3=1,N
    3 WRITE(6,300) (ATONOS(I3,J3),J3=1,N)
      WRITE(6,99999)
      WRITE (6,300) (BTONOS(I),I=1,N)
C
C  H ORIZOYSA TOY SYSTHMATOS
      CALL ORIZ(ATONOS,NPLIN,N,DET,NA)
      READ(5,9)  SXOLIO
      WRITE(6,9)  SXOLIO
      WRITE(6,300)  DET
      IF(DET.EQ.0.) STOP
C
C  H LYSH TOY SYSTHMATOS
      CALL LYSTR(ATONOS,BTONOS,X,N,NA)
      READ(5,9)  SXOLIO
      WRITE(6,9)  SXOLIO
      WRITE(6,300) (X(I),I=1,N)
C
    9 FORMAT(20A4)
  100 FORMAT(I4)
  200 FORMAT(10F8.0)
  300 FORMAT(1H0,2X,10G13.5)
99999 FORMAT(1H0)
      STOP
      END

      SUBROUTINE  TRIGON(AA,BB,A,B,NPLIN,N,NA)
C  ANAGEI SYSTHMA GRAMMIKON EXISOSEON SE ISODYNAMO TRIGONIKO
C
C  NA        =  MEGISTH DIASTASH MHTRON TOY KYRIOY PROGRAMMATOS
C  N         =  DIASTASH DIDOMENHS MHTRAS
C  DEDOMENA  =  AA(N,N),BB(N) = ARXIKO SYSTHMA
C  ZHTOYMENA =  A(N,N),B(N)   = TRIGONIKO ISODYNAMO SYSTHMA
C  NPLIN     =  GINOMENO TON PROSHMON POY PROKYPTOYN LOGO
C               ENALLAGHS TON GRAMMON TOY ARXIKOY SYSTHMATOS
      DIMENSION  AA(NA,NA),BB(N), A(NA,NA),B(N)
C
C  ARXIKES TIMES
      DO  63  IK=1,N
        DO  62  JK=1,N
  62        A(IK,JK)=AA(IK,JK)
  63     B(IK)=BB(IK)
      NPLIN=1
C
```

(σχ. 3 συνέχεια)

```
C   EKTELESH TON N-1 BHMATON
        N1=N-1
        DO  1  I = 1 , N1
C
C   STO I-BHMA BRES PROTA PIO STOIXEIO THS I-STHLHS
C   EINAI MEGISTO KAT APOLYTO TIMH, EXETAZOME MONO
C   TIS I TELEYTAIES GRAMMES:
          M=I
          I1=I+1
          DO  3  K= I1,N
             IF(ABS(A(K,I)).LE.ABS(A(M,I))) GO TO 3
             M=K
   3      CONTINUE
C
C   AFOY BRHKAME TO MEGISTO TON I TELEYTAION STOIXEION
C   THS  I KOLONAS STHN M THESH , ENALLASOME THN I ME THN M GRAMMH
C   EFOSON  M.NE.I
          IF(A(M,I).NE.0.) GO TO 2
          NPLIN=0
       GO TO 1
   2      CONTINUE
          IF(I.EQ.M) GO TO 6
          DO 4 I2=I,N
             F=A(I,I2)
             A(I,I2)=A(M,I2)
   4         A(M,I2)=F
          F=B(I)
          B(I)=B(M)
          B(M)=F
          NPLIN=-NPLIN
   6      CONTINUE
C
C   METASXHMATISMOS TOY SYSTHMATOS MESO GRAMMIKON
C   SYNDYASMON TON SEIRON.
          DO  5  I3=I1,N
             B(I3)=B(I3)-A(I3,I)/A(I,I)*B(I)
             DO 8 I4=I1,N
                A(I3,I4)=A(I3,I4)-A(I,I4)*A(I3,I)/A(I,I)
   8         CONTINUE
   5      CONTINUE
          DO 7 I3=I1,N
   7         A(I3,I)=0.
   1  CONTINUE
      RETURN
      END


      SUBROUTINE ORIZ(A,NPLIN,N,DET,NA)
      DIMENSION   A(NA,NA)
      S=1.
      DO  1  I=1,N
   1  S=S*A(I,I)
        DET=S*FLOAT(NPLIN)
      RETURN
      END
```

(σχ. 3 συνέχεια)

```
      SUBROUTINE LYSTR(A,B,X,N,NA)
       DIMENSION  A(NA,NA),B(N),X(N)
      X(N)=B(N)/A(N,N)
      N1=N-1
      DO  1  I=1,N1
      NI=N-I
      S=B(NI)
      NI1=NI+1
      DO  2  J=NI1,N
    2 S=S-A(NI,J)*X(J)
    1 X(NI)=S/A(NI,NI)
      RETURN
      END
```

(σχ. 3 συνέχεια)

<u>'Αποτελέσματα :</u>

```
 TO ARXIKO SYSTHMA

 3.0000        1.0000        2.0000        4.0000

-5.0000        2.0000        6.0000        7.0000

  .0           3.0000        4.0000        1.0000

  .0            .0          -5.0000       -6.0000


 4.0000      -13.000         1.0000       -5.0000

 TO ISODYNAMO TRIGONIKO SYSTHMA

 5.0000        2.0000        6.0000        7.0000

  .0           3.0000        4.0000        1.0000

  .0            .0          -5.0000       -6.0000

  .0            .0            .0           4.2667


-13.000        1.0000       -5.0000       -7.2000

 H ORIZOYSA TOY SYSTHMATOS

-320.00

 H LYSH TOY SYSTHMATOS

 2.6125       -3.1375        3.0250       -1.6875
```

(σχ. 4)

Μιά μήτρα $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ .. & .. & \cdots & .. \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$

λέγεται "συμμετρική" ὅταν ἔχει τήν ἰδιότητα

$$a_{i,j} = a_{j,i} \quad \text{γιά } i,j = 1,2, \ldots , n .$$

π.χ. ἡ μήτρα $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ εἶναι συμμετρική.

Ἀποδεικνύεται ὅτι γιά κάθε συμμετρική μήτρα A n-διαστάσεων ὑπάρχουν n πραγματικοί ἀριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ (ὄχι ἀπαραιτήτως διαφορετικοί μεταξύ των), ἔτσι ὥστε γιά κάθε ἕνα ἀπ' τά λ_i, ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστον διάνυσμα

$$\vec{X} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n), \quad \vec{X} \neq \vec{0}$$

μέ τήν ἰδιότητα

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n &= \lambda_i x_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n &= \lambda_i x_2 \\ .. \quad .. \quad \ldots \quad .. \quad & \quad .. \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n &= \lambda_i x_n \end{aligned} \tag{16}$$

τήν (16) γράφουμε ἐν συντομία

$$A \cdot \vec{X} = \lambda_i \cdot \vec{X} \tag{17}$$

Τά $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ λέγονται "ἰδιοτιμές" τῆς συμμετρικῆς μήτρας A. Ἐάν ἕνα διάνυσμα $\vec{X}$ πληροῖ τήν (17) τότε λέγεται τό $\vec{X}$ "ἰδιοδιάνυσμα" τῆς A ὡς πρός τήν ἰδιοτιμή λ_i.

Ἕνα τετριμμένο παράδειγμα συμμετρικῆς μήτρας εἶναι τό

$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Τούτη ἔχει τίς τρεῖς ἰδιοτιμές : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 5$. Ἡ ἐξίσωση $A \cdot \vec{X} = 5 \cdot \vec{X}$ πληροῦται γιά κάθε διάνυσμα $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$, ἄρα κάθε διάνυσμα τριῶν διαστάσεων εἶναι ἰδιοδιάνυσμα τῆς μήτρας αὐτῆς ὡς πρός τήν ἰδιοτιμή 5. Ἐν γένει τό πρόβλημα τῆς εὑρέσεως τῶν ἰδιοτιμῶν μιᾶς γενικώτερης συμμετρικῆς μήτρας δέν εἶναι τόσο τετριμμένο. Στά ἑπόμενα περιγράφεται μιά προσεγγιστική μέθοδός (τοῦ Jacobi) μέ τήν ὁποία ξεκινῶντας ἀπό τήν δοθείσα συμμετρική μήτρα A κατασκευάζουμε διαδοχικά μιά ἀκολουθία $A_1=A, A_2, A_3, \ldots$ μητρῶν οἱ ὁποῖες συγκλίνουν πρός μιά "διαγώνιο" μήτρα δηλαδή μήτρα τῆς μορφῆς

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & d_n \end{pmatrix}$$

Τά $d_1, d_2, \ldots, d_n$ στοιχεῖα τῆς ὁριακῆς αὐτῆς διαγωνίου μήτρας, εἶναι ἀκριβῶς οἱ ἰδιοτιμές τῆς ἀρχικῆς μήτρας. Στήν ἀκολουθία $A_1, A_2, A_3, \ldots$ κατασκευάζεται κάθε μήτρα ἀπό τήν προηγούμενή της ὡς ἑξῆς :

Ἔστω ὅτι ἔχουμε ἤδη κατασκευάσει τήν $A = A_i$ καί θέλουμε νά κατασκευάσωμε τήν $B = A_{i+1}$.

1ον) Εὑρίσκουμε ποιό ἀπό τά στοιχεῖα $a_{i,j}$ μέ $i<j$ (δηλ. πάνω ἀπ' τήν διαγώνιο τῆς A) τῆς A εἶναι μέγιστο κατ' ἀπόλυτο τιμή λ.χ τό $a_{\lambda,\varkappa}$.

2ον) Κατασκευάζουμε μιά μήτρα U τῆς μορφῆς

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \lambda- \\ \\ \\ \varkappa- \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} & & & \lambda & & & \varkappa & & \\ & & & | & & & | & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \cos(\varphi) & \ldots & \ldots & -\sin(\varphi) & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \sin(\varphi) & \ldots & \ldots & \cos(\varphi) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (18)$$

ἔτσι ὥστε στήν μήτρα γινόμενο

$B = U^{\tau} \cdot A \cdot U$ τό στοιχεῖο $b_{\lambda,\varkappa} = 0$ (19)

Ἡ μήτρα B εἶναι ὁ ἑπόμενος ὅρος τῆς ἀκολουθίας

$A_{i+1} = B$ πού ζητούσαμε .

3ον) Ἡ κατασκευή τῆς μήτρας U ἔτσι ὥστε νά πληροῦται ἡ συνθήκη (19) ἀνάγεται στήν ἐπίλυση μιᾶς ἐξισώσεως. Πράγματι ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ἡ U ἔχει τήν μορφή (18) καί ἐκτελέσουμε τόν πολλαπλασιασμό μήτρῶν $B=U^{\tau}\cdot A\cdot U$ τότε εὑρίσκουμε ὅτι τά στοιχεῖα τῆς B δίδονται συναρτήσει τῶν στοιχείων τῆς A καί τῶν $c=\cos(\varphi)$, $s=\sin(\varphi)$ μέσω τῶν τύπων :

I : <u>Σημεῖα διασταυρώσεως τῶν λ,κ-στηλῶν/γραμμῶν τῆς B</u>

$$\begin{aligned} b_{\lambda,\kappa} &= c\cdot s\cdot(a_{\lambda,\lambda}-a_{\kappa,\kappa})+(c^2-s^2)\cdot a_{\lambda,\kappa} \\ b_{\lambda,\lambda} &= c^2\cdot a_{\lambda,\lambda}-2\cdot c\cdot s\cdot a_{\lambda,\kappa}+s^2\cdot a_{\kappa,\kappa} \\ b_{\kappa,\kappa} &= s^2\cdot a_{\lambda,\lambda}+2\cdot c\cdot s\cdot a_{\lambda,\kappa}+c^2\cdot a_{\kappa,\kappa} \end{aligned} \tag{20}$$

II : <u>Ὑπόλοιπα στοιχεῖα τῶν λ,κ-στηλῶν/γραμμῶν τῆς B</u>

$$\begin{aligned} b_{\mu,\kappa} &= s\cdot a_{\mu,\lambda}+c\cdot a_{\mu,\kappa} \\ b_{\mu,\lambda} &= c\cdot a_{\mu,\lambda}-s\cdot a_{\mu,\kappa} \end{aligned}$$

III : <u>Ὅλα τά ὑπόλοιπα στοιχεῖα τῆς B εἶναι τά ἴδια μέ τῆς A.</u>

Σημείωσε ὅτι ἐφ' ὅσον ἡ μήτρα A εἶναι συμμετρική τότε καί ἡ μήτρα $B=U^{\tau}\cdot A\cdot U$ εἶναι πάλι συμμετρική. Ἡ ἀπαίτηση τοῦ (19) $b_{\lambda,\kappa}=0$ ἰσοδυναμεῖ λοιπόν σύμφωνα μέ τήν (20) μέ τήν

$$-\frac{1}{2}(a_{\lambda,\lambda}-a_{\kappa,\kappa})/a_{\lambda,\kappa}=\frac{1}{2}(c^2-s^2)/c\cdot s = \cot(2\varphi)$$

παίρνοντας $\vartheta = (a_{\kappa,\kappa}-a_{\lambda,\lambda})/(2a_{\lambda,\kappa})$ καί

$$t = \begin{cases} 1 \text{ ἐάν } \vartheta=0 \\ \vartheta + \mathrm{sign}(\vartheta)\cdot\sqrt{\vartheta^2+1}\ , \text{ ἐάν } \vartheta\neq 0, \end{cases}$$

ὅπου $\mathrm{sign}(\vartheta)$ τό πρόσημο τοῦ ϑ (δηλ. +1 ἤ -1) εὑρίσκουμε

$$\cos(\varphi) = 1/\sqrt{1+t^2}$$

$$\sin(\varphi) = \cos(\varphi)\cdot t$$

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα ξεκινᾶ ἀπό τήν μήτρα A καί μέ τή βοήθεια τῆς SUBROUTINE JACOBI κατασκευάζει μέ τήν μέθοδο πού περιγράψαμε τήν ἀκολουθία A_1, A_2, A_3, A_4, ... Τό πρόγραμμα σταματᾶ ὅταν συμβεῖ γιά τό στοιχεῖο $a_{\lambda,\kappa}$ τοῦ 1ον) $|a_{\lambda,\kappa}\cdot n|<\varepsilon$, γιά δοθέν ε .

<u>Πρόγραμμα :</u>

```
C   P19.3  EYRESH IDIOTIMON SYMMETRIKON MHTRON
C          ME TH METHODO TOY JACOBI
C           MHTRES TO POLY 10 EPI 10 DIASTASEON
C
      DIMENSION   A(10,10),B(10,10)
      NA=10
C
C   DIABASE TA N, E KAI TH MHTRA A(N,N)
      READ(5,100)  N,E
      DO 11 I=1,N
   11 READ(5,200)  (A(I,J),J=1,N)
C
C   TYPOSE THN A(N,N)
      WRITE(6,400)
      DO 22 I=1,N
   22 WRITE(6,300)   (A(I,J),J=1,N)
C
C   EKTELESE 10 TO POLY EPANALIPTIKA BHMATA:
      DO 1 NEPAN= 1,10
C
C   YPOLOGISE TON EPOMENO ORO THS AKOLOYTHIAS MHTRON
      CALL JACOBI(A,N,E,MARKA,NA)
C
C   EXETASE AN PLHROYTAI TO E KRITHRIO
      IF (MARKA.EQ.1) STOP
C
C   TYPOSE THN MHTRA
      WRITE(6,99999) NEPAN
      DO 33 I=1,N
   33 WRITE(6,300)   (A(I,J),J=1,N)
    1 CONTINUE
C
C   TA FORMAT TOY PROGRAMMATOS
  100 FORMAT(1I4,1E16.8)
  200 FORMAT(10F8.4)
  300 FORMAT(1H0,3X,10G13.5)
  400 FORMAT(4H0    ,20H  H DIDOMENH MHTRA =   )
99999 FORMAT(1H0,/4X,I2,32H-OS OROS THS AKOLOYTHIAS MHTRON    )
      STOP
      END


      SUBROUTINE JACOBI(A,N,E,MARKA,NA)
C
C   NA      =  MEGISTH DIASTASH MHTRON TOY KYRIOY PROGRAMMATOS
C   N       =  DIASTASH DIDOMENHS MHTRAS
C   E       =  KRITHRIO DIAKOPHS KATASKEYHS AKOLOYTHIAS
C   H SUBROUTINE AYTH KATASKEYAZEI TON EPOMENO ORO THS AKOLOY-
C   THIAS MHTRON BASEI TOY DOTHENTOS PROHGOYMENOY A.
C   O EPOMENOS OROS SYMBOLIZETAI PALI ME A
C   H MARKA =0 OTAN H PALAIA A DEN PLHROI TO E-KRITHRIO.
      DIMENSION A(NA,NA)
C
```

(σχ. 5)

```
C  EYRESH TOY MEGISTOY KAT APOLYTON TIMHN  A(L,K), ME L.LT.K
      MARKA=0
      L=1
      K=2
      H=ABS(A(1,2))
      N1=N-1
      DO  1  I=1,N1
      I1=I+1
        DO  2  J=I1,N
        IF(ABS(A(I,J)).LE.H) GO TO 2
        H=ABS(A(I,J))
        L=I
        K=J
    2       CONTINUE
    1 CONTINUE
C
C  H=A(L,K) EINAI TO MEGISTO POY ZHTAME, AKOLOYTHEI H KATA
C  SKEYH TON C=COS(FI),S=SIN(FI).  PROHGOYMENOS ROTAME AN
C  PLHROYTAI TO E-KRITHRIO.
      IF(H*N.LT.E) GO TO 8
C
      TH=(A(K,K)-A(L,L))/2./A(L,K)
       T=1.
       IF(TH.NE.0.)  T=1./(TH+SIGN(SQRT(TH*TH+1.),TH))
      C=1./SQRT(1.+T*T)
      S=C*T
C  AKOLOYTHEI O YPOLOGISMOS THS MHTRAS B ME TH BOHTHIA
C
C  TON C,S.
C
C  ALLAGH TON STOIXEION STA SHMEIA DIASTABROSEOS TON L,K
C  GRAMMON KAI STHLON.
      H=C*C*A(L,L)-2.*C*S*A(L,K)+S*S*A(K,K)
      G=S*S*A(L,L)+2.*C*S*A(L,K)+C*C*A(K,K)
      A(K,L)=0.
      A(L,K)=0.
      A(L,L)=H
      A(K,K)=G
C
C  ALLAGH TON STOIXEION STA YPOLOIPA SHMEIA TON L KAI K
C  GRAMMON KAI STHLON.
      DO 3 J3=1,N
      IF(J3.EQ.L.OR.J3.EQ.K) GO TO 3
      H=C*A(J3,L)-S*A(J3,K)
      A(J3,K)=S*A(J3,L)+C*A(J3,K)
      A(J3,L)=H
      A(K,J3)=A(J3,K)
      A(L,J3)=A(J3,L)
    3 CONTINUE
C
C  TA YPOLOIPA STOIXEIA PARAMENOYN ANALOIOTA
      RETURN
    8 MARKA=1
      RETURN
      END
```

(σχ. 5 συνέχεια)

<u>'Αποτελέσματα :</u>

H DIDOMENH MHTRA =

0.72000	0.45000	0.38000
0.45000	0.91000	0.56000
0.38000	0.56000	0.12000

1-OS OROS THS AKOLOYTHIAS MHTRON

0.72000	0.57440	0.13027
0.57440	1.2003	0.00000
0.13027	0.00000	-0.17029

2-OS OROS THS AKOLOYTHIAS MHTRON

0.33757	0.00000	0.10843
0.00000	1.5827	0.72194E-01
0.10843	0.72194E-01	-0.17029

3-OS OROS THS AKOLOYTHIAS MHTRON

0.35975	0.14469E-01	0.00000
0.14469E-01	1.5827	0.70729E-01
0.00000	0.70729E-01	-0.19247

4-OS OROS THS AKOLOYTHIAS MHTRON

0.35975	0.14458E-01	-0.57513E-03
0.14458E-01	1.5855	0.00000
-0.57513E-03	0.00000	-0.19529

5-OS OROS THS AKOLOYTHIAS MHTRON

0.35958	0.00000	-0.57509E-03
0.00000	1.5857	-0.67821E-05
-0.57509E-03	-0.67821E-05	-0.19529

(σχ. 6)

```
6-OS OROS THS AKOLOYTHIAS MHTRON

0.35958        0.70293E-08  0.00000

0.70293E-08    1.5857       -0.67821E-05

0.00000       -0.67821E-05 -0.19529

7-OS OROS THS AKOLOYTHIAS MHTRON

0.35958        0.70293E-08  0.26768E-13

0.70293E-08    1.5857       0.00000

0.26768E-13    0.00000      -0.19529
```

Ἀσκήσεις

P19.4 Προσδιόρισε τίς ἀντιστρόφους τῶν μητρῶν :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 16 & 25 & 36 \\ 49 & 64 & 81 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

P19.5 Τροποποίησε τό P19.1 ἔτσι ὥστε μετά τήν εὕρεση τῆς ἀντιστρόφου AANT τῆς A νά ἐκτελῆ τούς πολλαπλασιασμούς B=A·AANT καί B=AANT·A καί νά τυπώνη τά ἀποτελέσματα.

P19.6 Τί κάνει ὁ 2-DO-κύκλος τοῦ P19.1 ;

P19.7 Μέσω τῆς ἀντιστρόφου $B=A^{-1}$ τῆς μήτρας A μποροῦμε νά λύσωμε τό γραμμικό σύστημα $A\cdot\overleftarrow{x}=\overleftarrow{b}$ (γιά τό συμβολισμό δές (17)). Ἡ λύση δίδεται μέσω τῆς $\overleftarrow{x}=A^{-1}\cdot\overleftarrow{b}$. Λύσε μέ τόν τρόπο αὐτό τίς ἐξισώσεις $A\cdot\overleftarrow{x}=\overleftarrow{b}$ μέ

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix},\quad \overleftarrow{b}=\begin{pmatrix}0.5\\ 1.5\\ 2.5\\ 3.5\end{pmatrix}.\quad A=\begin{pmatrix}0.3 & 0.8 & 0.7 & -0.9\\ -0.9 & 0.3 & 0.8 & 0.7\\ 0.7 & -0.9 & 0.3 & 0.8\\ 0.8 & 0.7 & -0.9 & 0.3\end{pmatrix},$$

$$\overleftarrow{b}=\begin{pmatrix}2.3\\ 1.1\\ 1.3\\ 0.5\end{pmatrix}.\quad A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 7 & 11\\ 0 & 3 & 7 & 10\\ 0 & 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \overleftarrow{b}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 6\end{pmatrix}$$

P19.8 Εἶναι δυνατόν μέ τήν βοήθεια τοῦ P19.2 νά βροῦμε τήν ἀντίστροφο δοθείσης μήτρας A ;

P19.9 Τροποποίησε τό P19.2 ἔτσι ὥστε ἀφοῦ βρεῖ τήν λύσι τοῦ συστήματος $A\cdot\overleftarrow{x}=\overleftarrow{b}$ νά ἐκτελῆ τόν πολλαπλασιασμό $A\cdot\overleftarrow{x}$ καί νά τυπώνη τό ἀποτέλεσμα.

P19.10 Τούς συντελεστάς a_1, a_2, ..., a_N τοῦ πολυωνύμου τοῦ Lagrange

$$P(x)=a_1x^{N-1}+a_2x^{N-2}+\ldots+a_{N-1}x+a_N$$

πού διέρχεται ἀπ' τά σημεῖα $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_N,y_N)$ (στό P18.1 εὑρίσκομε τό πολυώνυμο τοῦ Lagrange ὄχι ὅμως διατεταγμένο κατά τίς κατιοῦσες δυνάμεις τοῦ x ὅπως συμβαίνει ἐδῶ) μποροῦμε νά προσδιορίσωμε λύνοντας ὡς πρός τά $a_1,a_2,\ldots,a_N$ τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων :

$$\begin{array}{l}x_1^{N-1}a_1+x_1^{N-2}a_2+\ldots+x_1a_{N-1}+1\cdot a_N=y_1\\ x_2^{N-1}a_1+x_2^{N-2}a_2+\ldots+x_2a_{N-1}+1\cdot a_N=y_2\\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad..\\ x_N^{N-1}a_1+x_N^{N-2}a_2+\ldots+x_Na_{N-1}+1\cdot a_N=y_N\end{array}$$

Κατασκεύασε ἀντίστοιχο πρόγραμμα τό ὁποῖο δοθέντων τῶν $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_N,y_N)$ προσδιορίζει μέ τήν βοήθεια τῶν ὑποπρογραμμάτων τοῦ P19.2 τά a_1, a_2, a_3, ..., a_N .

P19.11 Μέ τήν βοήθεια τοῦ P19.2 λύσε τά συστήματα $A\cdot\overleftarrow{X}=\overleftarrow{B}$

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix},\ \overleftarrow{B}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.\quad A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 9\\ 4 & 1 & 9\\ 9 & 1 & 4\end{pmatrix},\ \overleftarrow{B}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}.$$

$$A=\begin{pmatrix}101 & 101 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 1001 & 0 & 1\end{pmatrix},\ \overleftarrow{B}=\begin{pmatrix}5\\ 5\\ -67\end{pmatrix}.$$

P19.12 Κατασκεύασε ὑποπρόγραμμα τό ὁποῖο ἐκτελεῖ τούς ὑπολογισμούς καί τῶν τριῶν ὑποπρογραμμάτων τοῦ P19.2 .

P19.13 Κατασκεύασε ὑποπρόγραμμα τό ὁποῖο δοθέντων τῶν κ, λ, φ (μέ $\kappa<\lambda$) κατασκευάζει τήν μήτρα U τοῦ (18) σελ.182.

P19.14 Τά ἰδιοδιανύσματα μιᾶς συμμετρικῆς μήτρας προσεγγίζονται ἀπό τίς στῆλες τῆς ἀκολουθίας μητρῶν
U_1, $U_1\cdot U_2$, $U_1\cdot U_2\cdot U_3$, $U_1\cdot U_2\cdot U_3\cdot U_4$, ...
ὅπου U_i οἱ μῆτρες τοῦ (19) σελ. 182 γιά τίς ὁποῖες ἰσχύει

$$A_{i+1}=U_i^{\tau}\cdot A\cdot U_i$$

Τροποποιῶντας τό P19.3 κατασκεύασε ὑποπρόγραμμα τό ὁποῖο ὑπολογίζει τίς ἰδιοτιμές καί τά ἰδιοδιανύσματα μιᾶς συμμετρικῆς μήτρας.

P19.15 Προσδιόρισε μέ τήν βοήθεια τοῦ P19.14 τά ἰδιοδιανύσματα καί ἰδιοτιμές τῶν συμμετρικῶν μητρῶν

$$\begin{pmatrix}50 & 49 & 80\\ 49 & 50 & 49\\ 80 & 49 & 50\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

20

Σχόλια, Παραπομπές†

Όπως σημειώσαμε καί στόν πρόλογο οἱ διάλεκτοι FORTRAN τῶν διαφόρων ὑπολογιστῶν πού κυκλοφοροῦν στό ἐμπόριο περιέχουν σχεδόν ὅλοι τά στοιχεῖα τῆς ANSI-FORTRAN σάν γνήσιο ὑποσύνολο. Ἡ πλήρης καί ἐγγυρότερη περιγραφή τῶν στοιχείων πού ἀναφέραμε καθώς καί ὡρισμένων συμπληρωματικῶν στοιχείων τῆς FORTRAN δίδεται στό ἔγγραφο {1} , δές ἐπίσης καί τό {2} . Διευκρινήσεις διφορουμένων καί ἐπεξηγήσεις μπορεῖ ὁ ἀναγνώστης νά διαβάση στά ἄρθρα {3} καί {4} . Σάν βιβλίο ἀναφορᾶς γιά τήν FORTRAN IV καθώς καί τήν διάλεκτό της WATFIV ὑπάρχει τό καλογραμμένο βιβλίο τῶν Organick-Meissner {5} . Περισσότερες ἐφαρμογές τῆς FORTRAN στήν ἀριθμητική ἀνάλυση μπορεῖ νά βρῆ ὁ ἐνδιαφερόμενος στό ἐξαίρετο βιβλίο τῶν Conte καί De Boor {6} τοῦ ὁποίου ἀναμένεται ἡ νέα ἔκδοση.
Ὁ ἀναγνώστης ἀσφαλῶς θά παρατήρησε, ἀπ' τήν ἀρχή κι' ὅλας τοῦ βιβλίου, ὅτι στίς πράξεις μέ REAL ἀριθμούς ὑπεισέρχονται σφάλματα, π.χ. τά A, B, C στά ἀποτελέσματα τοῦ P6.3. Ἀντιθέτως πράξεις μέ ἀκεραίους ἐκτελοῦνται μέ ἀπόλυτη ἀκρίβεια ἐφ' ὅσον οἱ ἀκέραιοι αὐτοί δέν ὑπερβαίνουν τά ὅρια τοῦ ὑπολογιστῆ. Στήν §13 σημειώσαμε ἐν συντομία τήν αἰτία πού προκαλοῦνται αὐτά τά σφάλματα : Περισσότερες λεπτομέρειες γιά τό σύστημα "ἀριθμῶν κινητῆς ὑποδιαστολῆς" (=floating point real numbers) καί τά σφάλματα λόγω παραστήσεως τῶν REAL μέσω ἑνός τέτοιου συστήματος (round-off errors) μπορεῖ ὁ ἀνα-

---

† Ἀριθμοί ἐντός ἀγγυλῶν παραπέμπουν στήν βιβλιογραφία πού συνοψίζεται στό τέλος τοῦ βιβλίου.

γνώστης νά διαβάση στίς πρῶτες σελίδες τοῦ βιβλίου {6} πού ἀναφέραμε. Τά σφάλματα αὐτά εἶναι ἀμελητέα ἤ τουλάχιστον τά κρατοῦμε εὔκολα ὑπό ἔλεγχο ἐφ' ὅσον τό πρόγραμμα περιλαμβάνει ἕνα μικρό ἀριθμό πράξεων. Δεδομένου ὅμως ὅτι κάθε ἐνδιάμεση πράξη γίνεται μέ κάποιο σφᾶλμα τό ὁποῖο ἐπιρεάζει τό τελικό ἀποτέλεσμα, τίθενται τά προβλήματα τοῦ συστηματικοῦ ἐλέγχου τῶν σφαλμάτων καί τῆς δυνατότητας ἀξιολογήσεως τοῦ ἀποτελέσματος ἑνός προγράμματος. Ἰδιαίτερη σημασία ἀποκτοῦν αὐτά τά προβλήματα ὅταν τό πρόγραμμα περιλαμβάνει (ὅπως συνήθως συμβαίνει) μερικές χιλιάδες ἤ ἀκόμη ἑκατοντάδες χιλιάδων πράξεων. Τό τελικό ἀποτέλεσμα μπορεῖ τότε νά μήν ἔχη καμμιά σχέση μέ τήν πραγματικότητα. Ἕνα ἁπλό πρόγραμμα λ.χ. τό ὁποῖον προσθέτει ἀριθμούς πού δίδονται σέ κάρτες δεδομένων καί τό προϊόν τῆς προσθέσεως τό τοποθετεῖ στήν μεταβλητή SUMA εἶναι τό ἑξῆς :

```
    REAL  SUMA , POSON
1   READ(5,100)  POSON
100 FORMAT(F80.40)
    SUMA=SUMA+POSON
    WRITE(6,100)  POSON, SUMA
    GO TO 1
    END
```

Ἐάν θελήσωμε ὡστόσο νά χρησιμοποιήσωμε τό πρόγραμμα αὐτό π.χ. σέ μιά μεγάλη τράπεζα γιά τήν καταγραφή διακίνησης κεφαλαίων, τά ἀποτελέσματα θά εἶναι ὀλέθρια. Μετά μερικές πράξεις τό SUMA θά ξεπεράση τούς ἑπταψήφιους ἀριθμούς κι' ἀπό κεῖ καί πέρα τά σφάλματα θά εἶναι ἀνεξέλεγκτα. Τό τελικό σφᾶλμα (ἐάν κάποτε διακόψουμε τήν ἐκτέλεση τοῦ προγράμματος) θά μεταφράζεται σέ δισεκατομμύρια δραχμῶν. Βλέπουμε λοιπόν ὅτι προγράμματα σάν τό προηγούμενο (καθώς καί τά ὑπόλοιπα τοῦ βιβλίου), τά ὁποῖα ἐκτελοῦν ἁπλούστατες διαδικασίες θά πρέπει νά ἐφαρμόζωνται μέ μεγάλη προσοχή καί ἐν ἀνάγκη νά τροποποιοῦνται σέ βάθος, ἐάν θέλουμε νά ἔχουμε ἐμπιστοσύνη στά ἀποτελέσματά τους. Τό πρόγραμμα ἐκτός τῶν πράξεων πού ἐκτελεῖ θά πρέπει νά ἐλέγχη τά εἰσαγόμενα, νά ἐξετάζη ἄν εἶναι δυνατή ἡ ἐπεξεργασία τους, νά ἀποφεύγη πράξεις πού προκαλοῦν μεγάλα σφάλματα (ὅπως λ.χ. διαίρεση μέ πολύ μικρούς ἀριθμούς) καί νά δίνη ἕνα ὅριο στό ὁποῖο περιορίζεται τό σφᾶλμα τοῦ τελικοῦ ἀποτελέσματος.

'Εδώ ἀκριβῶς εἶναι ἡ τέχνη τοῦ προγραμματιστῆ, ὁ ὁποῖος πρέπει νά κρατᾶ στό πρόγραμμά του τή λεπτή ἰσορροπία μεταξύ εὐκολίας χρήσεως καί ἀκριβείας. Πέρα ἀπ' τήν ἐμπιστοσύνη πού πρέπει νά ἐμπνέη ἕνα πρόγραμμα, πρέπει νά εἶναι καί εὔχρηστο καί οἰκονομικό στήν λειτουργία του. Διότι ἕνα ἀνεπαρκές πρόγραμμα ὅπως τό προηγούμενο εἶναι ἐξ' ἴσου ἄχρηστο μέ ἕνα τό ὁποῖο ἀναλίσκει χρόνο σέ ἐξετάσεις ἐπί ἐξετάσεων τῶν δεδομένων καί ἐνδιαμέσων ἀποτελεσμάτων καί ἀπασχολεῖ τόν ὑπολογιστή ἐπί μακρύ χρονικό διάστημα πρίν ἐκτελέσει μία καί μόνο πράξη. Ἔχοντας κατά νοῦ τά ὅσα ἀναφέραμε δέν θά πρέπει νά ἐκπλαγῆ κανείς, νά μάθη ὅτι ἡ κατασκευή προγράμματος ποιότητος τό ὁποῖο νά λύνη τήν δευτεροβάθμιο ἐξίσωση $ax^2+bx+c=0$ ἀποτελεῖ ἀνοικτό θέμα ἐρεύνης. Πάνω στό θέμα αὐτό ἀλλά καί σέ ἄλλα λεπτά σημεῖα πού ὑπεισέρχονται στούς ὑπολογισμούς μέ προγράμματα θά μποροῦσε ὁ ἀναγνώστης νά διαβάση τό πολύ ἐνδιαφέρον καί εὐανάγνωστο ἄρθρο {7} τοῦ G. Forsyth. Μερικά καλογραμμένα καί χρήσιμα προγράμματα FORTRAN (προβλήματα ἀριθμητικῆς ἀναλύσεως κυρίως) πού ἀνταποκρίνονται σέ πολλές ἀπαιτήσεις, καθῶς καί ἀνάλυση τοῦ τρόπου λειτουργίας των μπορεῖ ὁ ἀναγνώστης νά διαβάση στό βιβλίο τῶν Forsyth, Malcolm καί Moler {8} .

'Απασχολούμενος ὁ ἀναγνώστης μέ τά προγράμματα τοῦ βιβλίου καί τῶν ἄλλων παραπομπῶν πού ἀναφέραμε σύντομα θά διαπιστώση, ὅτι ὡρισμένα προγράμματα διαβάζονται πιό εὔκολα ἀπό ἄλλα. Συνήθως ὅσο πιό πολύπλοκο εἶναι ἕνα πρόβλημα τόσο πιό δυσανάγνωστο εἶναι τό ἀντίστοιχο πρόγραμμα. 'Επίσης τό εὐανάγνωστο ἤ μή ἑνός προγράμματος συνδέεται συχνά καί μέ τήν "δομή" του δηλαδή τήν ὀργάνωση τῶν διαφόρων μερῶν του καί τήν μεταξύ τους διασύνδεση. Γι' αὐτό ἀπαιτεῖται ἀρκετή πεῖρα καί ἐπιδεξιότητα ἀπό τόν προγραμματιστή ὥστε ἀποφεύγοντας ὡρισμένους τρόπους γραφῆς πού δυσκολεύουν νά μεταχειρίζεται ἄλλους πού διευκολύνουν τήν ἀνάγνωση καί τήν μεθοδική λειτουργία τοῦ προγράμματος. Πάνω σ' αὐτό τό θέμα λ.χ. θεωροῦν ἀνεγνωρισμένοι προγραμματιστές (δές τό ἄρθρο {9} τοῦ E. Dijkstra) τήν ποιότητα ἑνός προγράμματος ἀντιστρόφως ἀνάλογο τοῦ πλήθους τῶν GO TO πού περιέχει. Ἴσως φανεῖ περίεργο ἐκ πρώτης ὄψεως τό ὅτι ἡ ἐντολή αὐτή μπορεῖ νά παραληφθῆ τελείως καί τό πρόγραμμα νά γραφῆ ἔτσι ὥστε νά προχωρῆ "ἐκ τῶν ἄνω πρός τά κάτω" χωρίς πηδήματα ἀπό δῶ κι' ἐκεί στά διάφορα σημεῖα του π.χ. τό P6.3 θά μποροῦσε νά γραφῆ ὡς ἑξῆς :

```
C  P20.1  LYSH DEYTEROBATHMIOY EXISOSEOS
      COMMON  A,B,C,D
      READ(5,700)  A,B,C
  700 FORMAT(3F20.0)
      IF(A.EQ.0.  .AND.  B.EQ.0.  .AND.  C.EQ.0. ) WRITE(6,400)
  400 FORMAT(9H0        A=,1P1E15.7,3H,B=,1P1E15.7,3H,C=,1P1E15.7
     1  //37H      KATHE X EINAI LYSH THS EXISOSEOS)
      IF(A.EQ.0.  .AND.  B.EQ.0.  .AND.  C.NE.0.)  WRITE(6,300)A,B,C
  300 FORMAT(9H0        A=,1P1E15.7,3H,B=,1P1E15.7,3H,C=,1P1E15.7
     1  //30H      H EXISOSH DEN EXEI LYSEIS)
      IF(A.EQ.0.  .AND.  B.NE.0. )  CALL LYSH1
      D=B**2-4.*A*C
      IF( A.NE.0.  .AND.  D.GE.0. )  CALL LYSHRE
      IF (A.NE.0.  .AND.  D.LT.0. )  CALL LYSHIM
      STOP
      END

      SUBROUTINE LYSH1
      COMMON  A,B,C,D
      X=-C/B
      WRITE(6,200)  A,B,C,X
  200 FORMAT(1H0,5X,2HA=,1P1E15.7,3H,B=,1P1E15.7,3H,C=,
     1  1P1E15.7//5X,4HX1R=,1PE15.7//26H      H EXISOSH EXEI 1 LYSH)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE LYSHRE
      COMMON  A,B,C,D
      X=-B/(2.*A)
      X1=X+SQRT(D)/(2.*A)
      X2=X-SQRT(D)/(2.*A)
      IF ( D.EQ.0. ) WRITE(6,600) A,B,C,X
  600 FORMAT(1H0,5X,2HA=,1P1E15.7,3H,B=,1P1E15.7,3H,C=,1P1E15.7
     1  //6X,4HX1R=,1P1E15.7/29HH EXISOSH EXEI MIA DIPLH RIZA)
       IF ( D.NE.0. ) WRITE(6,500) A,B,C,X1,X2
  500 FORMAT(9H0        A=,1P1E15.7,3H,B=,1P1E15.7,3H,C=,1P1E15.7
     1  //6X,4HX1R=,1P1E15.7/6X,4HX2R=,1P1E15.7//
     2  6X,37HH EXISOSH EXEI DYO PRAGMATIKES LYSEIS)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE LYSHIM
      COMMON  A,B,C,D
      D=SQRT(-D)
      X1R=-B/2./A
      X2R=X1R
      X1I=D/2./A
      X2I=-X1I
      WRITE(6,100) A,B,C,X1R,X1I,X2R,X2I
  100 FORMAT(1H0,5X,2HA=,1P1E15.7,3H,B=,1P1E15.7,3H,C=,
     1  1P1E15.7//5X,10H(X1R,X1I)=,1P2E15.7/5X,10H(X2R,X2I)=,
     2  1P2E15.7//5X,35HH EXISOSH EXEI DYO MIGADIKES LYSEIS)
      RETURN
      END
```

Παρατηροῦμε ἐδῶ τή χρήση τῆς SUBROUTINE χωρίς τυπικές μεταβλητές. Ἡ μεταβίβαση στοιχείων ἀπό τό κύριο- στό ὑπό-πρόγραμμα καί ἀντιστρόφως γίνεται μέσω ἑνός COMMON . Οἱ ὑπορουτίνες ἐδῶ δέν παριστοῦν συναρτήσεις ἀλλά πολύ περισσότερο "μπλόκ ἐντολῶν" οἱ ὁποῖες ἐκτελοῦνται ἀνάλογα μέ τίς ἀνάγκες τοῦ κυρίου προγράμματος. Ἡ LYSH1 λύνει τήν ἐξίσωση B*X+C =0 καί τυπώνει τά ἀποτελέσματα. Οἱ ἄλλες δύο LYSHRE, LYSHIM λύνουν τήν A*X**2+B*X+C=0 ὅταν A≠0 καί D≥0 ἀντ. D<0 καί τυπώνουν ἐπίσης τά ἀποτελέσματα.

Ἡ κατασκευή καλῶς δομημένων καί εὐαναγνώστων προγραμμάτων (structured programming) ἔχει βρῆ σήμερα μεγάλη ἀπήχηση. Τέτοια προγράμματα ἐπιτρέπουν ἐκτός τῶν ἄλλων ἕναν πληρέστερο ἔλεγχο τῶν ἐνδεχομένων σφαλμάτων πού περιέχονται στά διάφορα μέρη τους καί παρουσιάζουν μιά μεγαλύτερη "ἐλαστικότητα". Μ' αὐτό ἐννοοῦμε προσαρμοστικότητα στό εἰδικό πρόβλημα πού ἀπασχολεῖ τόν ἐνδιαφερόμενο. Σέ ὅλα τά ὑπολογιστικά κέντρα καταβάλλεται σήμερα προσπάθεια κατασκευῆς βιβλιοθήκης προγραμμάτων ὑψηλῆς ποιότητος καί καλῆς δομήσεως. Μάλιστα ἡ νεώτερη τυποποίηση τῆς FORTRAN ἡ λεγομένη FORTRAN V ἤ FORTRAN 77 (δές {10}) περιέχει ὅλα τά στοιχεῖα τῆς FORTRAN IV καί πέρα ἀπ' αὐτά εἰσάγει ὁρισμένες νέες ἐντολές, ἔτσι ὥστε νά διευκολύνεται ἡ κατασκευή καλῶς δομημένων προγραμμάτων. Περισσότερες εὐκολίες γιά τόν ἴδιο σκοπό ἀκόμη καί ἀπό τήν FORTRAN 77 περιέχει ἡ διάλεκτος WATFIV.

Ἐνδιαφέροντα παραδείγματα καί συγκρίσεις κακογραμμένων καί καλῶς δομημένων προγραμμάτων μπορεῖ ὁ ἐνδιαφερόμενος νά βρῆ στό ἄρθρο {11} τῶν Kernigan καί Plauger. Ἐπέκταση αὐτοῦ τοῦ ἄρθρου εἶναι τό βιβλίο {12} τῶν ἰδίων, τό ὁποῖο περιέχει ἕναν κατάλογο μέ πρακτικές συμβουλές χρήσιμες στήν κατασκευή καλῶς δομημένων προγραμμάτων. Ἐκτός αὐτῶν περιέχει ἐπίσης τό βιβλίο αὐτό καί μερικά ἁπλά προγράμματα στήν γλώσσα PL/I (ἡ ὁποία παρέχει περισσότερες δυνατότητες γιά καλῶς δομημένο προγραμματισμό ἀπ' ὅτι ἡ FORTRAN) τά ὁποῖα ὁ γνώστης τῆς FORTRAN IV μπορεῖ εὔκολα νά διαβάση καί μέ τόν τρόπο αὐτό νά ὠφεληθῆ τήν εἰσαγωγή σ' αὐτή τήν γλώσσα. Τέλος ἕνα καλογραμμένο βιβλίο τό ὁποῖο ἀναλύει καί συγκρίνει 4 ἀπό τίς γνωστότερες γλῶσσες προγραμματισμοῦ (FORTRAN (77), PL/I, ALGOL 60 καί ALGOL 68) εἶναι τό βιβλίο {13} τοῦ Meek τό ὁποῖο συνίσταται σ' ἐκεῖνον τόν ἀναγνώστη, ὁ ὁποῖος μέ βάση τήν FORTRAN θέλει νά εἰσαχθῆ σύντομα καί στίς ἄλλες 3 γλῶσσες καί τίς νέες ἐντολές πού περιέχει ἡ FORTRAN 77 . Σάν ἄσκηση κατά τήν ἀνάγνωση τοῦ βιβλίου αὐτοῦ μπορεῖ νά προταθῆ ἡ μετάφραση τῶν προγραμμάτων τοῦ παρόντος βιβλίου στίς ὑπόλοιπες γλῶσσες καθώς καί ἡ ἐφαρμογή τῶν ἐπιπροσθέτων εὐκολιῶν τῆς FORTRAN 77 στήν βελτίωση τῆς δομῆς τῶν προγραμμάτων αὐτῶν.

21

Λύσεις τῶν ἀσκήσεων

```
C   P1.3    ARITHMITIKES PRAXEIS
C   ORISMOS METABLHTON
        REAL A1,A2,A3,A4,A5,X,Y,Z
C   EKTELESH TON PRAXEON
        A1=1.3724
        A2=4.6372
        A3=4.3331
        A4=0.28
        A5=0.0014
        X=(A1**2+A2**2+A3**2+A4**2+A5**2)/5.
        Y=(A1+A2+A3+A4+A5)/5.
        Z=X/Y
C   EKDOSH APOTELESMATON
        WRITE(6,100) A1,A2,A3,A4,A5,X,Y,Z
        STOP
        END


C   P1.4    H RIZA KAI TO TETRAGONO ARITHMOY
C
        REAL X,Y,Z
        X=0.0009
        Y=X**0.5
        Z=X**2
        WRITE(6,100) X,Y,Z
    100 FORMAT(1H ,10X,E15.6)
        STOP
        END


C   P1.5    TEST GIA THN AKRIBEIA THS PROSTHESEOS
C           REAL  ARITHMON
        REAL  A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,A8
        REAL  B1,B2,B3,B4,B5,B6
        A1=1.0
        A2=1.1
        A3=1.01
        A4=1.001
        A5=1.0001
```

```
      A6=1.00001
      A7=1.000001
      A8=1.0000001
      B1=1.+1./16.
      B2=1.+1./(16.**2)
      B3=1.+1./(16.**3)
      B4=1.+1./(16.**4)
      B5=1.+1./(16.**5)
      B6=1.+1./(16.**6)
      WRITE(6,100)  A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,A8
      WRITE(6,100)  B1,B2,B3,B4,B5,B6
  100 FORMAT(1H ,10X,E15.6)
      STOP
      END
```

```
C   P1.6    H PROSTHESH REAL ARITHMON DEN EINAI
C           PROSETERISTIKH
      REAL  A1,A2,A3,S1,S2,S3,S4,S5,S6
      A1=5.555555
      A2=6.666666
      A3=7.777777
C   ATHRISMA TON A1,A2,A3 KATH OLES TIS DYNATES DIATAXEIS
      S1=A1+A2+A3
      S2=A2+A3+A1
      S3=A2+A1+A3
      S4=A1+A3+A2
      S5=A3+A1+A2
      S6=A3+A2+A1
C   TYPOSE TA APOTELESMATA
      WRITE(6,222) A1,A2,A3,S1,S2,S3,S4,S5,S6
  222 FORMAT(1H ,10X,E15.6)
      STOP
      END
```

P2.3 `Y=X**8+X`

P2.4

```
Y=1.+X/100.
Y=A*(1.+X/100.)**10
Z=(Y2-Y1)/(X2-X1)
Y=5.*X**2*(5.-2.*5.**0.5)**0.5
Y=X*(X/2.*3.**0.5+3.*H)
Y=2.*(X1*X2+X2*X3+X3*X1)
MC=(A**2/2.+B**2/2.+C**2/4.)**0.5
K=(4.*P*P*Q*Q-(B*B+D*D-A*A-C*C)**2)**0.5/4.
E=PI*RO*RO
MPER=2.*PI*RO
EEL=2.*PI*((A*A+B*B)/2.)**0.5
T=PI*R*(R+(R*R+H*H)**0.5)
S=(2.*R*R-R*(4.*R*R-4.)**0.5)*0.5
```

P2.5 Δῶσε τό P2.2 μέ : A=80.
B=90.
C=100.

```
C   P2.6    EMBADON TRIGONOY KAI PODIKOY AYTOY
      REAL A,B,C,HA,HB,HC,E,EPOD,S,SH,DYOE
      A=22.
      B=23.
      C=24.
C
      S=(A+B+C)/2.
      E=(S*(S-A)*(S-B)*(S-C))**0.5
      DYOE=2.*E
      HA=DYOE/A
      HB=DYOE/B
      HC=DYOE/C
      SH=(HA+HB+HC)/2.
      EPOD=(SH*(SH-HA)*(SH-HB)*(SH-HC))**0.5
      WRITE(6,100)  A,B,C,E,HA,HB,HC,EPOD
  100 FORMAT(1H ,10X,E15.6)
      STOP
      END
```

```
C   P2.7    PRAXEIS ME REAL
      REAL  A1,A2,A3,A4,S,SS
      A1=1./3.
      A2=1./7.
      A3=1./11.
      A4=1./13.
      S=A1+A2+A3
      SS=S**(-0.5)
      S=S+A4
      WRITE(6,100)  A1,A2,A3,A4,S,SS
  100 FORMAT(1H ,10X,E15.6)
      STOP
      END
```

```
C   P2.8    YPSOSH SE REAL DYNAMH
      REAL  X,XX,XXX
      X=13.**(1./13.)
      XX=0.01212**(1./3.)
      XXX=3.14159**(1./27.)
      WRITE(6,100)  X,XX,XXX
  100 FORMAT(1H 10X,E15.6)
      STOP
      END
```

P2.9 Τά A,B,C αὐτά δέν μποροῦν νά παριστοῦν πλευρές ἑνός τριγώνου, διότι δέν πληροῦται ἡ τριγωνική ἀνισότητα

$$A < B + C$$

Γιά τό λόγο αὐτό κατά τόν ὑπολογισμό τοῦ E ἡ ὑπό τήν ρίζα παράσταση γίνεται ἀρνητική καί ὁ ὑπολογιστής διακόπτη τόν ὑπολογισμό καί τυπώνει ἀντίστοιχο δήλωση πρός τόν προγραμματιστή.

P2.10 Τό X εἶναι πολύ μεγάλο. X**2 = 1.E100 ξεπερνᾶ ἤδη τό ὅριο τοῦ ὑπολογιστῆ πού εἶναι περίπου 1.E75 (IBM 370). Τέτοια ἐνδεχόμενα μποροῦμε νά ἐλέγχουμε μέ τήν ἐντολή IF πού θά ἐξετάσουμε ἀργότερα.

P3.3 Σύμφωνα μέ τόν κανόνα ζ),1ον) μποροῦμε νά ἀφαιρέσουμε τήν ἐντολή

```
REAL A,B,C,S,E
```

P3.4 Ὅταν ὁ M διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ N .

P3.5 M1=0 τότε καί μόνον ὅταν τό M διαιρεῖται ἀκριβῶς με το N . Γιά θετικά M, N παριστᾶ τό M1 τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ M διά N .

P3.6 Τό M1=M-M/N*N παίρνει ἀρνητικές τιμές ὅταν M<0, N>0. Ὅταν 0<M<N τότε M1=M .

```
C  P3.7   ATHROISMATA DYNAMEON AKERAION
      INTEGER  S1,S2,S3
      N=20
      S1=N*(N+1)/2
      S2=N*(N+1)*(2*N+1)/6
      S3=(N*(N+1)/2)**2
      WRITE(6,100)  N,S1,S2,S3
  100 FORMAT(1H ,10X,I15)
      STOP
      END
```

P4.3 Τύπωσε σέ μιά σειρά 3 ἀκεραίους πού καταλαμβάνουν 15 τυπογραφικές θέσεις ὁ καθένας.

P4.4 Κάθε φορά πού ἐκτελεῖται ἡ ἐντολή αὐτή αὐξάνει ἡ τιμή τοῦ I κατά 1 .

P4.5 Ἡ προηγούμενη ἐντολή ἐφοδιάζει τό I2 μέ τό τετράγωνο τοῦ I, I3=I2*I δίδει κατόπιν στό I3 τήν τιμή τοῦ κύβου τοῦ I .

```
C  P4.6   TETRAGONA KAI KYBOI FYSIKON ARITHMON
      N1=1000
      N2=1100
      I=N1-1
C  AYXHSH TOY I KATA 1
   17 I=I+1
C  TETRAGONO TOY I
      I2=I*I
```

```
C   KYBOS TOY I
        I3=I2*I
C   TYPOSE TA I, I2, I3 SE MIA SEIRA
        WRITE(6,400) I,I2,I3
  400 FORMAT(1H ,10X,3I15)
        IF(I.EQ.N2) STOP
        GO TO 17
        END
```

```
C   P4.7    H SYNARTHSH S(N)=1+2+3+...+N
        INTEGER  SN
        N1=1
        N2=100
        I=N1-1
        SN=0
   11   I=I+1
        SN=SN+I
        WRITE(6,100)  I,SN
  100   FORMAT(1H ,10X,2I15)
        IF(I.EQ.N2) STOP
        GO TO 11
        END
```

P4.8 Ἀντικατάστησε στό P4.7 τήν ἐντολή
SN=SN+I μέ τίς ἐντολές

```
J=I**2
SN=SN+J
```

```
C   P4.9    YPOLOGISMOS MEXRI TO ANOTATO ORIO TOY YPOLOGISTH
        INTEGER SN
        NDYN=3
        MEGA=2**31-1
        I=0
        SN=0
   13   I=I+1
        J=I**NDYN
        IF(SN.GT.MEGA-J) STOP
        SN=SN+J
        WRITE(6,100)  I,SN
  100   FORMAT(1H ,10X,2I15)
        GO TO 13
        END
```

P4.10 Ἄλλαξε στό P4.9 τήν ἐντολή : NDYN=3
μέ τήν : NDYN=4

```
C   P4.11  YPOLOGISMOS MEXRI TO ANOTATO ORIO TOY YPOLOGISTH
        INTEGER  S1,S2,S3,S4,S5
        MEGA=2**31-1
        I=0
        S1=0
        S2=0
        S3=0
```

```
      S4=0
      S5=0
    1 I=I+1
      IF(S5.GT.MEGA-I**5) STOP
      S1=S1+I
      S2=S2+I**2
      S3=S3+I**3
      S4=S4+I**4
      S5=S5+I**5
      WRITE(6,100)  I,S1,S2,S3,S4,S5
  100 FORMAT(1H ,10X,6I15)
      GO TO 1
      END
```

P5.4 Ἐάν Y=0 τότε τυπώνεται τό παρόν N τό ὁποῖον εἶναι καί ὁ ζητούμενος Μ.Κ.Δ. Ἄλλως προχωροῦμε στό ἑπόμενο βῆμα.

P5.5 Κάθε φορά πού ἐκτελεῖται τό τμῆμα I τοῦ προγράμματος ὑπολογίζεται καί ἕνας ἀριθμός τοῦ Fibonacci. Μέ τό τμῆμα II τοῦ προγράμματος ὑπολογίζεται δοθέντων τῶν F1, F2 ὁ ἑπόμενος ἀριθμός τοῦ Fibonacci F1+F2, ἡ δέ τιμή του τοποθετεῖται στό F2. Ἡ τιμή τοῦ παλαιοῦ F2 τοποθετεῖται στό F1 .

P5.6 Ἐκτελοῦνται οἱ πολλαπλασιασμοί :

1·2

1·2·3

1·2·3·4

....

1·2·3·....·N = N!

P5.7 Ὄχι λόγω τοῦ 3.ζ),2ον).

```
C  P5.8   ELAXISTO KOINO POLLAPLASIO
      INTEGER  A,B,D,EKP,P,Y
      A=21
      B=108
      NA=A
      NB=B
      WRITE(6,100) A,B
C
C  DIATASSOME TA A,B ETSI OSTE   A .GE. B
C  EAN  A .LT. B  TOTE ENALLASSOME TIS TIMES TOYS
      IF(A.GE.B) GO TO 1
      L=A
      A=B
      B=L
C  TORA EINAI  A .GE. B , EYRISKOME TON M.K.D (=D)
    1 P=A/B
      Y=A-P*B
      IF(Y.EQ.0) GO TO 2
      A=B
      B=Y
      GO TO 1
```

```
C  EYRIKAME TON M.K.D. , EYRISKOME TORA KAI TO E.K.P.(=EKP)
     2 D=B
       EKP=NA/D*NB
       WRITE(6,100) EKP
   100 FORMAT(1H ,10X,2I15)
       STOP
       END
```

```
C  P5.9    EYRESH TOY PLHTHOYS TON POLLAPLASION TOY M
C          POY EYRISKONTAI METAXY TON N1,N2.
       N1=1
       N2=999999
       M=5
       NPL=N2/M-N1/M
       WRITE(6,100)  N1,N2,M,NPL
   100 FORMAT(1H ,10X,2I15)
       STOP
       END
```

P5.10   'Εάν ἕνας ἀριθμός διαιρεῖται ταυτοχρόνως μέ τούς 3, 7,17 τότε θά διαιρεῖται ἐπίσης καί μέ τό γινόμενό τους 357= 3·7·17. Δῶσε τό P5.9 μέ M=357 .

```
C  P5.11   EYRESH TON PARAGONTIKON
C          MEXRI TOY MEGISTOY DYNATOY
       MEGA = 2**31-1
       N=0
     1 N=N+1
       NPAR=1
       I=0
C  YPOLOGISMOS TOY N-PARAGONTIKOY = NPAR
     2 I=I+1
       IF(NPAR.GT.MEGA/I) STOP
       NPAR=NPAR*I
       IF(I.NE.N) GO TO 2
       WRITE(6,100) N,NPAR
   100 FORMAT(1H ,10X,2I15)
C  AYXHSE TO N KATA 1 KAI EPANELABE THN DIADIKASIA
       GO TO 1
       END
```

```
C  P5.12   PROGRAMMA TOY EYRISKEI TO PLHTHOS (=L)
C          TON AKERAION METAXY TOY N1 KAI N2 POY
C          PERIEXOYN TO PSHFIO K (=0,1,2,3,...,9)
C
       K=5
       N1=1
       N2=999
C
       L=0
       I=N1-1
     1 I=I+1
       IF(I.GT.N2) GO TO 4
C  EXETAZOME TA PSHFIA TOY I ARXIZONTAS
C  ME TO TELEYTAIO PSHFIO TOY (=IY)
```

```
      J=I
    2 IP=J/10
      IY=J-IP*10
      IF(IY.EQ.K) GO TO 3
C   EAN IY.NE.K PROXOROYME STO EPCMENO PSIFIO (=IY) TOY I
C   EF OSON YPARXEI TETOIO, ALLOS PROXOROYME STON EPOMENO
C   ARITHMO  I+1.
      IF(IP.EQ.0) GO TO 1
      J=IP
      GO TO 2
    3 L=L+1
      WRITE(6,100) I
C   TO PARON I PERIEXEI LOIPON TO PSHFIO  K
C   PROXOROYME STO I+1
      GO TO 1
    4 WRITE(6,100) L
      STOP
  100 FORMAT(1H ,10X,I15)
      END
```

```
C   P5.13  ANALYSH ARITHMOY SE PROTOYS PARAGONTES
      NDIDO=1801800
      WRITE(6,100) NDIDO
      N=NDIDO
C   NDIDO = O ARITHMOS POY DIDETAI
C   ARXIZOME NA DIAIROYME TO N ME TA 2,3,...
    1 I=1
    2 I=I+1
      IF(I**2.GT.N) GO TO 3
      NP=N/I
      NY=N-NP*I
      IF(NY.NE.0) GO TO 2
C   EAN NY = 0 , TOTE TO I DIAIREI TO N, ARA KAI TO NDIDO
      WRITE(6,100) I
      N=NP
      GO TO 1
    3 WRITE(6,100) N
C   OTAN I*I.GT.N , TOTE TO PARON N EINAI O MEGISTOS
C   PROTOS POY DIAIREI TO NDIDO
  100 FORMAT(1H ,10X,I15)
      STOP
      END
```

P5.14 Τό 18! ὑπερβαίνει τά ὅρια τοῦ ὑπολογιστῆ. Ἕνα καλό πρόγραμμα πρέπει νά προνοῆ ἔτσι ὥστε στίς ἐνδιάμεσες πράξεις νά μήν γίνεται ὑπέρβαση τῶν ὁρίων τοῦ ὑπολογιστῆ.

```
C   P5.15  YPOLOGISMOS TOY EMBADOY TRIGONOY KATOPIN
C          ELEGXOY THS TRIGONIKHS IDICTHTAS
      REAL A,B,C,S,E
      A=10.
      B=5.
      C=4.
      AMEG=A
      IF(B.GT.AMEG) AMEG=B
      IF(C.GT.AMEG) AMEG=C
```

```
C   ORISMOS METABLHTON
C   O TYPOS TOY HRONA
        S=0.5*(A+B+C)
        IF(S.LT.AMEG) STOP
        E=(S*(S-A)*(S-B)*(S-C))**0.5
C
C   EKTYPOSH APOTELESMATON
        WRITE(6,100) A,B,C,S,E
  100 FORMAT(1H ,10X,E15.6)
        STOP
        END
```

P5.16 Όχι.

```
C   P6.6    PARAGOGH LEYKON SELIDON
        N=20
        I=0
    1 I=I+1
        WRITE(6,100)
  100 FORMAT(1H1)
        IF(I.NE.N) GO TO 1
        STOP
        END
```

```
C   P6.7    EKTYPOSH GRAMMOTOY XARTIOY
        N=20
        I=0
    1 I=I+1
        WRITE(6,100)
  100 FORMAT(1H0,40H----------------------------------------
     $          ,40H----------------------------------------
     $          ,40H----------------------------------------)
        IF(I.NE.N) GO TO 1
        STOP
        END
```

```
C   P6.8    EKTYPOSH PROTYPON SELIDON PROGRAMMATISMOY
C
        N=20
        I=0
    1 I=I+1
        WRITE(6,100)
        IF(I.NE.N) GO TO 1
  100 FORMAT(1H0,40H1----6----------------------------------
     $          ,40H--------------------------------73------
     $          ,40H----------------------------------------)
        STOP
        END
```

```
C   P6.9   H ANTISTROFOS TETRAGONIKHS MHTRAS
      A=1.
      B=2.
      C=3.
      D=4.
      OR=A*D-B*C
      IF(OR.EQ.0.) GO TO 1
      A1=D/OR
      B1=-B/OR
      C1=-C/OR
      D1=A/OR
      WRITE(6,150)
      WRITE(6,200) A,B,A1,B1
      WRITE(6,200) C,D,C1,D1
      GO TO 2
    1 WRITE(6,300)
  150 FORMAT(1H0,3X,14HDEDOMENH MHTRA,18X,
     *        17HANTISTROFOS MHTRA /)
  200 FORMAT(3H    ,1P2E15.6,3X,1P2E15.6)
  300 FORMAT(1H0,25H MHTRA DEN ANTISTREFETAI      )
    2 STOP
      END
```

```
C   P6.10  EKTYPOSH POLLON ARITHMON SE MIA SEIRA
      N=100
      I=-10
    1 I=I+10
      IF(I.GE.N) STOP
      I1=I+1
      I2=I+2
      I3=I+3
      I4=I+4
      I5=I+5
      I6=I+6
      I7=I+7
      I8=I+8
      I9=I+9
      I10=I+10
      WRITE(6,100)      I1,I2,I3,I4,I5,I6,I7,I8,I9,I10
  100 FORMAT(1H ,10X,10I10)
      GO TO 1
      END
```

```
C   P6.11  EKTYPOSH POLLON ARITHMON SE MIA SEIRA
      M=23
      N=100
      I=-10
    1 I=I+10
      IF(I.GE.N) STOP
      M1=(I+1)*M
      M2=M1+M
      M3=M2+M
      M4=M3+M
```

```
      M5=M4+M
      M6=M5+M
      M7=M6+M
      M8=M7+M
      M9=M8+M
      M10=M9+M
      WRITE(6,100) M1,M2,M3,M4,M5,M6,M7,M8,M9,M10
  100 FORMAT(1H ,10X,10I10)
      GO TO 1
      END
C   P6.12  PYTHAGORIOI ARITHMOI
C
      INTEGER  A,B,C
      NORIO = 51
      N1=-1
    1 N1=N1+2
C   EXETAZOME AN PLHROYTAI H PROTH SYNTHIKH
      IF(N1.GT.NORIO) STOP
      N2=N1
    3 N2=N2+2
C   EXETAZOME PALI AN PLHROYTAI H PROTH SYNTHIKH
      IF(N2.GT.NORIO) GO TO 1
C   EXETAZOME TON KOINO DIAIRETH (ALGORITHMOS TOY EYKLEIDOY)
      M1=N1
      M2=N2
    4 MP=M2/M1
      MY=M2-MP*M1
      IF(MY.EQ.0) GO TO 5
      M2=M1
      M1=MY
      GO TO 4
C   EAN O KOINOS DIAIRETHS M1=1, TOTE TO ZEYGOS (N1,N2)
C   EINAI AP' AYTA POY ZHTAME
    5 IF(M1.NE.1) GO TO 3
C   TYPOSE TA  N1,N2 KAI ANTISTOIXA  A,B,C
      A=N1*N2
      B=(N2**2-N1**2)/2
      C=(N1**2+N2**2)/2
      WRITE(6,100) N1,N2,A,B,C
  100 FORMAT(1H0,5X,4H(N1=,I4,5H, N2=,I4,2H ),5X,2HA=,
     $        I4,4H, B=,I4,4H, C=,I4)
      GO TO 3
      END


C   P7.3   TRIGONOMETRIKOS PROSDIORISMOS APOSTASEOS APO
C          EYTHIA
C   YPOLOGISE TA X1,X2,PQ,E,APO
      PI=3.141592
      FI=3.1
      OMEGA1=0.03
      OMEGA2=0.02
      A=50.28
      B=75.32
```

```
C
C   YPOLOGISE TA X1, X2, PQ
      X1=A*SIN(OMEGA1)/SIN(PI-FI-OMEGA1)
      X2=B*SIN(OMEGA2)/SIN(PI-FI-OMEGA2)
      PQ=X1*X1+X2*X2-2.*X1*X2*COS(PI-FI)
      PQ=SQRT(PQ)
      S=(X1+X2+PQ)/2
      E=SQRT(S*(S-X1)*(S-X2)*(S-PQ))
      APO=2.*E/PQ
C
C   TYPOSE TO APOTELESMA
      WRITE(6,100) PQ
  100 FORMAT(1H ,5X,3HPQ=,1PE14.7,6H METRA)
      WRITE(6,200) E,APO
  200 FORMAT(1H0,6X,2HE=,1PE14.7,6H METRA//
     $        1H0,4X,4HAPO=,1PE14.7,6H METRA)
      STOP
      END
```

P7.4 Κάθε φορά πού έκτελεῖται τό (I) προσδιορίζονται τά ἀθροίσματα :

$AN=1+(1/2)+(1/3)+...+(1/I)$
$BN=1+(1/2^2)+(1/3^2)+...+(1/I^2)$
$CN=1+(1/2^3)+(1/3^3)+...+(1/I^3)$
$DN=1+(1/2^4)+(1/3^4)+...+(1/I^4)$ γιά τήν τρέχουσα τιμή τοῦ I.

Τό (II) ὑπολογίζει κατά σειράν τά $1/I, 1/I^2, 1/I^3, 1/I^4$.

```
C  P7.5   PINAKAS TIMON SYNARTHSEOS
      N=10
      I=0
    1 I=I+1
      X=FLOAT(I)
      Y=ALOG((X**2+X+1.)/ABS(SIN(X)))
      WRITE(6,100) X,Y
      IF(I.EQ.N) STOP
      GO TO 1
  100 FORMAT(1P2E20.5)
      END
```

```
P7.6    Y=SIN(TAN(23.)/23.)
        Y=1./SQRT(1.+SQRT(1.-1./X/X))
        Y=TAN(2.*X)/TAN(X)
        Y=X/(2.*X+EXP(1./(X-1.)))
        Y=EXP(-2.*T)*(1.+1./(T+1.))
        Y=ALOG(ABS(ALOG(ABS(X))))
        Y=A**ALOG(X)
        Y=T*ALOG(T)-3.*T**2
        Y=ALOG((A+COTAN(X))/(A-2.*COTAN(X)))
```

```
C  P7.7   XRHSH SYNARTHSEON THS FORTRAN
      NORIO=100
      I=0
      XMEGA=TAN(1.)
    1 I=I+1
      X=TAN(FLOAT(I))
      WRITE(6,100) I,X
  100 FORMAT(5X,4HTAN(,I3,2H)=,1PE12.5)
C
      XMEGA=AMAX1(XMEGA,X)
      IF(I.NE.NORIO) GO TO 1
      WRITE(6,200) XMEGA
  200 FORMAT(1H0,5X,6HXMEGA=,1PE12.5)
      STOP
      END
```

P7.8 ʼΑντικατάστησε στό P7.7 τήν ἐντολή:
XMEGA=AMAX1(XMEGA,X)
μέ τήν IF(XMEGA.LT.X) XMEGA=X

```
C  P7.9   ENALLAGH TON PERIEXOMENON DYO METABLHTON
      A=TAN(FLOAT(2**31-1))
      B=TAN(FLOAT(2**16))
      I=1
      IF(A.GE.B) GO TO 1
      I=-1
      F=A
      A=B
      B=F
    1 WRITE(6,100) I, A, B
  100 FORMAT(3H I=,I1,1P2E20.7)
      STOP
      END
```

P8.5 Οἱ τέσσερεις πρῶτοι ἀριθμοί A(1),A(2),A(3),A(4) τυπώνονται στή 1η γραμμή. Οἱ τέσσερεις ἑπόμενοι στήν δεύτερη γραμμή καί ὁ A(9) στήν τρίτη.

P8.6 Τό (*) ὑπολογίζει τά A(I),A(I),C(I) γιά I ἀπό 1 μέχρι 13. Τό (**) τυπώνει τά A(I),B(I),C(I) γιά I ἀπό 1 μέχρι 13.

```
C  P8.7   H  10 EPI 10 MHTRA TOY HILBERT
      REAL  A(10,10)
      NORIO=10
C  EFODIASMOS THS A ME TIMES
      I=0
   11 I=I+1
      J=0
   22 J=J+1
      A(I,J)=1./FLOAT(I+J)
      IF(J.LT.NORIO) GO TO 22
      IF(I.LT.NORIO) GO TO 11
```

```
C   EKTYPOSH THS MHTRAS
      WRITE(6,270) A
  270 FORMAT(1H0,5X,10E12.4)
      STOP
      END
```

Σημείωσε έδώ τήν έντολή REAL A(10,10) ή όποία έπιτρέπεται στήν ANSI-FORTRAN καί ίσοδυναμεῖ μέ τίς δύο έντολές:

```
        REAL A
        DIMENSION A(10,10)
```

P8.8 Κάθε φορά πού έκτελεῖται τό (*) μέρος τοῦ προγράμματος προσδιορίζεται ένα νέο X βάσει τῆς παλαιᾶς τιμῆς τοῦ X μέσω τοῦ τύπου

```
        X=MOD(X*32581,N)
```

καί ένας νέος τυχαῖος άριθμός μέσω τοῦ τύπου

```
        A(I)=FLOAT(X)/XN
```

Σημείωσε ότι οί άριθμοί πού παράγονται κατ' αύτόν τόν τρόπο δέν είναι τυχαῖοι σύμφωνα άκριβῶς μέ τήν έννοια πού ώρίσαμε άλλά πολύ περισσότερο "ψευδοτυχαῖοι", δηλαδή ή κατανομή τους προσεγγίζει κατά κάποιον τρόπο τήν όμαλή κατανομή στό διάστημα (0,1) . Περισσότερα γιά τυχαίους άριθμούς μπορεῖ ό άναγνώστης νά βρῆ στό άρθρο {15} τοῦ Barnett, καθώς καί στό τελευταῖο κεφάλαιο τοῦ βιβλίου {8} τό όποῖο περιέχει ένα ένδιαφέρον πρόγραμμα (URAND) FORTRAN γιά τήν παραγωγή άκολουθίας τυχαίων άριθμῶν.

```
C   P8.9   XRHSH DIANYSMATOS, ARITHMOI TOY FIBONACCI
      INTEGER  FIB(40)
      NA=40
      FIB(1)=1
      FIB(2)=1
      I=2
    1 I=I+1
      FIB(I)=FIB(I-1)+FIB(I-2)
      IF(I.LT.NA) GO TO 1
      WRITE(6,100) FIB
  100 FORMAT(5X,5I11)
      STOP
      END

C   P8.10  RIPSH ZARIOY
      NFORES=100
      N=2**15
      XN=FLOAT(N)
      N1=3671
C   RIPSH TOY ZARIOY NFORES, METRHMA TON ASSON
      NASSO=0
      I=0
    1 I=I+1
      N1=MOD(N1*32581,N)
      A=FLOAT(N1)/XN
      N6=INT(6.*A+1.5)
      IF(N6.EQ.1) NASSO=NASSO+1
      IF(I.LT.NFORES) GO TO 1
```

```
      WRITE(6,100) NFORES, NASSO
  100 FORMAT(1H0,12HRIPSH ZARIOY ,I8,8H   FORES ,
     $       I8,6H FORES,7H  ASSOS )
      STOP
      END
```

```
C   P8.11   RIPSH NOMISMATOS
C   RIPSH NOMISMATOS NFORES, NKOR METRA POSES FORES
C   HRTHE KORONA
      NFORES=100
      NKOR=0
      N=2**15
      XN=FLOAT(N)
      N1=3671
      I=0
    1 I=I+1
      N1=MOD(N1*32581,N)
      A=FLOAT(N1)/XN
      NN=INT(2.*A+1.5)
      IF(NN.EQ.1) NKOR=NKOR+1
      IF(I.LT.NFORES) GO TO 1
      WRITE(6,100) NFORES,NKOR
 100  FORMAT(1H0,5HRIPSH,11H NOMISMATOS,I8,8H   FORES,
     $       I8,6H FORES,7H KORONA)
      STOP
      END
```

```
C   P8.12  PINAKAS PROPAIDEIAS
      INTEGER PROP(10,10)
      IMAX=10
      JMAX=10
      I=0
    1 I=I+1
      J=0
    2 J=J+1
      PROP(I,J)=I*J
      IF(J.LT.JMAX)  GO TO 2
      IF(I.LT.IMAX)  GO TO 1
C
      WRITE(6,100) PROP
  100 FORMAT(1H ,3X,10I6)
      STOP
      END
```

P8.13   Στό τάβλι ὑπάρχουν 4·6 = 24 δυνατές θέσεις γιά ἕνα πούλι, τίς ὁποῖες μποροῦμε νά παραστήσωμε μέ τίς 24 συνιστῶσες ἑνός διανύσματος ἀκεραίων

```
        INTEGER TABLI(24)
```

Ἄσπρα πούλια μποροῦμε νά παριστοῦμε μέ τό +1, μαῦρα μέ -1 .

Μιά τοποθέτηση ἰσοδυναμεῖ τότε μέ τό νά ἐφοδιάσωμε τό διάνυσμα TABLI μέ τιμές ἀρνητικές, θετικές ἤ 0, πού ὑποδηλώνουν πόσα καί τί χρώματος πούλια εὑρίσκονται σέ κάθε θέση. Ὑποθέτουμε ἐδῶ ὅτι σέ μιά θέση δέν μποροῦν νά εὑρίσκονται ταυτόχρονα πούλια καί τῶν δύο χρωμάτων. Ἐάν ὁ περιορισμός αὐτός δέν ἰσχύει, τότε θά πρέπει νά παραστήσωμε μιά τοποθέτηση μέ δύο διανύσματα

```
        INTEGER ASPRA(24),MAYRA(24)
```

ὁ ρόλος τῶν ὁποίων εἶναι ἀνάλογος μέ τόν τοῦ TABLI . Ἄν ὑποθέσουμε λ.χ. ὅτι ἕνα πρόγραμμα "παίζει πόρτες μέ τά ἄσπρα", τότε μετά ἀπό μιά "ζαριά" τῶν ἄσπρων τό πρόγραμμα αὐτό θά πρέπει νά ἐξετάζη πώς πρέπει νά μεταβληθοῦν οἱ τιμές τῶν ASPRA, MAYRA πρός "ὄφελος" τῶν ἄσπρων. Ἔτσι λ.χ. ἐάν τ'ἄσπρα κινοῦνται ἀπό τό ASPRA(1) πρός τό ASPRA(24) καί πρίν τήν ζαριά τῶν ἄσπρων ἦταν |MAYRA(13)|<1, μετά τήν ζαριά τό πρόγραμμα θά πρέπει μεταξύ τῶν ἄλλων νά ἐξετάζη καί ἄν εἶναι δυνατόν τό ASPRA(13) νά πάρη τήν τιμή 2, πού σημαίνει ὅτι τά ἄσπρα κάνουν μιά "πόρτα" στήν θέση αὐτή.

P8.14 Στό σκάκι ὑπάρχουν 8×8=64 δυνατές θέσεις, τίς ὁποῖες μποροῦμε νά τίς παραστήσωμε μέ μιά μήτρα 8×8 διαστάσεων

```
        INTEGER SKAKI(8,8)
```

Τά πιόνια μποροῦμε νά τά συμβολίσωμε μέ ἀκέραιους ἀριθμούς π.χ. γιά τά λευκά :

0 = κενό
1 = στρατιώτης
2 = ἄλογο
3 = ἀξιωματικός
4 = πύργος
5 = βασίλισσα
6 = βασιλιάς

Ἀναλόγως μποροῦμε στά μαῦρα νά ἀντιστοιχήσωμε τούς ἀρνητικούς ἀριθμούς (-1,-2,-3,-4,-5,-6). Ἔτσι μιά τοποθέτηση γιά τά πιόνια ἀντιστοιχεῖ σέ ἕνα ἐφοδιασμό τῆς μήτρας SKAKI μέ τιμές ἀπό τό σύνολο $\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6\}$. Μιά κίνηση ἀντιστοιχεῖ σέ μιά ἀλλαγή τῶν τιμῶν τῆς μήτρας SKAKI σύμφωνα μέ τούς κανόνες πού ἐπιβάλλει τό παιχνίδι καί τίς προθέσεις τοῦ παίχτη. Γιά περισσότερες λεπτομέρειες καθώς καί περιγραφή τοῦ τρόπου λειτουργίας ἑνός προγράμματος πού παίζει σκάκι θά μποροῦσε ὁ ἀναγνώστης νά διαβάση τήν ἐνδιαφέρουσα συλλογή ἄρθρων στό βιβλίο {16} τοῦ Frey. Στό ἄρθρο {17} τοῦ Berliner μπορεῖ ὁ ἐνδιαφερόμενος νά βρῆ μία σύντομη περιγραφή τῆς ἱστορίας καί τῆς ἐξέλιξης τῶν προγραμμάτων σκακιοῦ μέχρι τό 1978 καθώς καί παραπομπές σέ ἀντίστοιχη βιβλιογραφία.

```
C   P9.6    DIAIRESH AKERAION ME MEGALH AKRIBEIA
C   AKER   = AKERAIO MEROS TOY M/N
C   PSIFIO = TA META THN YPODIASTOLH PSIFIA TOY M/N
C   YPOL   = YPOLOIPO THS DOKIMHS
      INTEGER AKER,PSIFIO,YPOL
      DIMENSION PSIFIO(500)
      M=1
      N=125000
      AKER=M/N
      YPOL=M-AKER*N
```

```
C
C  YPOLOGISMOS TON PSIFIO(1), PSIFIO(2),..., PSIFIO(500)
      DO 11 I=1,500
C
C  KATO TO 0...
      YPOL=YPOL*10
      IF(YPOL.EQ.0) GO TO 111
C
C  TO EPOMENO PSIFIO
      PSIFIO(I)=YPOL/N
C
C  TO YPOLOIPO THS DOKIMHS
      YPOL=YPOL-PSIFIO(I)*N
   11 CONTINUE
C
C  EKTYPOSH
  111  I=I-1
      WRITE(6,200) M,N
  200 FORMAT(1H ,2HM=,I8,4H, N=,I8)
      WRITE(6,100) AKER,(PSIFIO(J),J=1,I)
  100 FORMAT(5HOM/N=,I6,1H.,50I1/9(12X,50I1/))
      STOP
      END
```

P9.7 Ὁ 11-DO-κύκλος ὑπολογίζει τά ψηφία τοῦ X ὡς πρός B ἐκ δεξιῶν πρός τά ἀριστερά. Ἔτσι λ.χ. BOH(1) εἶναι τό πρῶτο ἐκ δεξιῶν ψηφίο τοῦ X (ὡς πρός βάση B) BOH(2) τό δεύτερο κ.ο.κ. Ὁ 22-DO-κύκλος ἀντιστρέφει τό BOH(1),..,BOH(I) καί κάνει PSIFIO(1)=BOH(I),PSIFIO(2)=BOH(I-1),...,PSIFIO(I)=BOH(1).

```
C  P9.9   ANTISTROFOI TON PROTON 1000 ARITHMON
C  AKER   = AKERAIO MEROS TOY M/N
C  PSIFIO = TA META THN YPODIASTOLH PSIFIA TOY M/N
C  YPOL   = YPOLOIPO THS DOKIMHS
      INTEGER AKER,PSIFIO,YPOL
      DIMENSION PSIFIO(500)
      M=1
      NMAX=1000
      DO 33 N=2,NMAX
      AKER=M/N
      YPOL=M-AKER*N
C
C  YPOLOGISMOS TON PSIFIO(1), PSIFIO(2),..., PSIFIO(500)
      DO 11 I=1,500
C
C  KATO TO 0...
      YPOL=YPOL*10
      IF(YPOL.EQ.0) GO TO 111
C
C  TO EPOMENO PSIFIO
      PSIFIO(I)=YPOL/N
C
C  TO YPOLOIPO THS DOKIMHS
      YPOL=YPOL-PSIFIO(I)*N
   11 CONTINUE
```

```
C
C  EKTYPOSH
 111  I=I-1
      WRITE(6,200) M,N
  200 FORMAT(1H ,2HM=,I8,4H, N=,I8)
      WRITE(6,100) AKER,(PSIFIO(J),J=1,I)
   33 CONTINUE
  100 FORMAT(5HOM/N=,I6,1H.,50I1/9(12X,50I1/))
      STOP
      END


C  P9.10  GRAFH TON 1,2,...,1000 OS PROS BASH B=9
C  PSIFIO = PSIFIA TOY X OS PROS BASH B
C  BOH    = BOHTHITIKO DIANYSMA
      INTEGER PSIFIO, BOH, PHLIKO, X, B
      DIMENSION PSIFIO(100),BOH(100)
      B=9
      NMAX=1000
      DO 44 X=1,NMAX
      PHLIKO=X
C
C  YPOLOGISMOS TON PSIFION
      DO 11 I=1,100
      BOH(I)=PHLIKO-PHLIKO/B*B
      PHLIKO=PHLIKO/B
      IF(PHLIKO.EQ.0) GO TO 22
   11 CONTINUE
C
C  H PAROYSA TIMH TOY I = PLHTHOS TON PSIFION TOY X OS PROS B
C  ANTISTROFH DIATAXH TOY BOH DIDEI TO PSIFIO
   22 DO 33 J=1,I
      PSIFIO(J)=BOH(I+1-J)
   33 CONTINUE
C
C  TYPOSE TA I PSIFIA TOY X OS PROS BASH B
      WRITE(6,713) X,B,(PSIFIO(K),K=1,I)
   44 CONTINUE
  713 FORMAT(1H0,2X,10H0 ARITHMOS,3H X=,I11,
     1        14H  GRAFETAI STH/16H          BASH B=,
     2        I5 /16H                X=,100I1)
      STOP
      END


C  P9.11  GRAFH TON 200 PROTON FYSIKON SE DIAFORES
C         BASEIS  B=2,3,4,5,6,7,8,9.
C  PSIFIO = PSIFIA TOY X OS PROS BASH B
C  BOH    = BOHTHITIKO DIANYSMA
      INTEGER PSIFIO, BOH, PHLIKO, X, B
      DIMENSION PSIFIO(100),BOH(100)
      NMAX=200
      DO  55  B=2,9
      DO 44 X=1,NMAX
      PHLIKO=X
```

```
C
C   YPOLOGISMOS TON PSIFION
        DO 11 I=1,100
        BOH(I)=PHLIKO-PHLIKO/B*B
        PHLIKO=PHLIKO/B
        IF(PHLIKO.EQ.0) GO TO 22
    11  CONTINUE
C
C   H PAROYSA TIMH TOY I = PLHTHOS TON PSIFION TOY X OS PROS B
C   ANTISTROFH DIATAXH TOY BOH DIDEI TO PSIFIO
    22  DO 33 J=1,I
        PSIFIO(J)=BOH(I+1-J)
    33  CONTINUE
C
C   TYPOSE TA I PSIFIA TOY X OS PROS BASH B
        WRITE(6,713) X,B,(PSIFIO(K),K=1,I)
    44  CONTINUE
    55  CONTINUE
   713  FORMAT(1H0,2X,10H0 ARITHMOS,3H X=,I11,
     1         14H  GRAFETAI STH/16H          BASH B=,
     2         I5 /16H                X=,100I1)
        STOP
        END
```

P9.12 B=2 , 2 ψηφία : 0,1

B=5 , 5 ψηφία : 0,1,2,3,4

B=16 , 16 ψηφία : 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F

Στό δεκαδικό σύστημα A=10,B=11,C=12,D=13,E=14,F=15

B=100000, 100000 ψηφία : 0,1,2,..., 99999

Ὁ ἀριθμός 375638115 ἔχει 2 ψηφία στό σύστημα μέ βάση $B=10^5$

$$\underbrace{375638115 = \underline{3756}\cdot(B=10^5) + \underline{38115}\cdot B^0}_{\text{δύο ψηφία}}$$

```
C   P9.13  POLLAPLASIASMOS PENTAPSIFION ARITHMON STO SYSTHMA
C          ME BASH  B=100000
C   OI PENTAPSIFIOI ARITHMOI    NA, NB
        NA=78955
        NB=37653
        NC=NB
C   EKTELESH POLLAPLASIASMOY KATA TO EPOMENO SXHMA
        NAB1=0
        NAB2=0
          DO 1 I=1,5
          NPSIF=MOD(NC,10)
          NC=NC/10
          NAB2=NAB2+MOD(NA*NPSIF,10**(6-I))*10**(I-1)
          NAB1=NAB1+NA*NPSIF/10**(6-I)
     1    CONTINUE
        NAB1=NAB1+NAB2/10**5
        NAB2=     MOD(NAB2,10**5)
        WRITE(6,100)  NA,NB,NAB1,NAB2
   100  FORMAT(1H0,7H     NA=,I5/8H      NB=,I5/
     $        8H  NA*NB=,2I15)
        STOP
        END
```

Τό πρόγραμμα ἐκτελεῖ τόν πολλαπλασιασμό κατά τόν συνηθισμένο τρόπο προσθέτει ὅμως τά μερικά γινόμενα χωριστά γιά κάθε στήλη, ἔτσι ὥστε τά πέντε τελευταῖα ψηφία τοῦ ἀθροίσματος τῆς δεύτερης στήλης νά δίδουν τό δεύτερο ψηφίο NAB2 τοῦ γινομένου A*B τό δέ ἄθροισμα τῆς πρώτης στήλης νά δίδη μαζύ μέ τό πρῶτο ψηφίο τοῦ ἀθροίσματος τῆς δεύτερης στήλης, τό πρῶτο ψηφίο NAB1 τοῦ γινομένου A*B .

NA = 78955
NB = 37653

$NA*3/10^5=$	2	$36865=MOD(NA*3,10^5)$
$NA*5/10^4=$	39	$47750=MOD(NA*5,10^4)*10$
$NA*6/10^3=$	473	$73000=MOD(NA*6,10^3)*10^2$
$NA*7/10^2=$	5526	$85000=MOD(NA*7,10^2)*10^3$
NA*3/10	=23686	$50000=MOD(NA*3,10\ )*10^4$

29726 2 92615
+
NAB1= 29728,92615=NAB2

P9.14 ʽΟ 22-DO-κύκλος ὑπολογίζει διαδοχικά τά :
S=X(1)*Y(1)
S=X(1)*Y(1)+X(2)*Y(2)
S=X(1)*Y(1)+X(2)*Y(2)+X(3)*Y(3) κ.ο.κ.
S=X(1)*Y(1)+ ...... +X(6)*Y(6) .

P9.15 ʽΗ πρώτη γραμμή τῶν ἀποτελεσμάτων περιέχει τίς ἕξη συνιστῶσες τοῦ X. ʽΗ δεύτερη γραμμή περιέχει τίς συνιστῶσες τοῦ Y. ʽΗ τρίτη τό ἐσωτερικό γινόμενο. Παρατήρησε ὅτι οἱ δύο ἐντολές :

```
WRITE(6,1000) X
WRITE(6,1000) (X(I),I=1,6)
```

εἶναι ἰσοδύναμες. Ἄν θέλαμε ὡστόσο νά τυπώσουμε μόνο τίς τρεῖς πρῶτες (ἐκ τῶν ἕξη) συνιστῶσες τῶν X, Y τότε θά ἔπρεπε νά χρησιμοποιήσωμε τόν πεπλεγμένο DO-κύκλο :

```
WRITE(6,1000) (X(L),L=1,3)
WRITE(6,1000) (Y(L),L=1,3)
```

P9.16 Οἱ 11- καί 33-DO-κύκλοι ἐφοδιάζουν τίς μῆτρες A,B μέ τιμές. ʽΟ 55-DO-κύκλος ἐκτελεῖ τόν πολλαπλασιασμό τῶν μητρῶν. Τό I μεταβάλλεται μέ τόν 55-DO-κύκλο, τό J μέ τόν 66- καί ὁ 77-DO-κύκλος ὑπολογίζει γιά κάθε I,J τό C(I,J)

$$C(I,J)=\sum_{K=1}^{6} A(I,K)\cdot B(K,J)$$

P9.17 Μέ τούς τρεῖς αὐτούς DO-κύκλους τυπώνονται κατά σειράν οἱ τρεῖς μῆτρες A,B,C . Καί στούς τρεῖς DO-κύκλους I εἶναι ὁ δείκτης πού καθορίζει τήν γραμμή τῆς μήτρας καί J ὁ δείκτης πού καθορίζει τήν στήλη.

```
C   P9.18  ARITHMOI TOY FINONACCI
      INTEGER FIB(100)
      FIB(1)=1
      FIB(2)=1
      MEGA = 2**31-1
        DO 11 I=3,100
        IF(FIB(I-1).GT.MEGA-FIB(I-2)) GO TO 22
   11   FIB(I)=FIB(I-1)+FIB(I-2)
   22 I=I-1
      WRITE(6,100)  (J,FIB(J),J=1,I)
  100 FORMAT(1H ,I2,29H-OS ARITHMOS TOY FIBONACCI = ,I10)
      STOP
      END
```

P9.20 'Αντικατάστησε στό P9.4 τίς ἐντολές

A(I,J)=1./FLOAT(2*I+J)
B(I,J)=FLOAT(2*I+J) μέ τίς

A(I,J)=1./FLOAT(I+J)
B(I,J)=FLOAT(I+J)

P9.21 Γιά δοθέν B (π.χ. B=16), κάθε ἀριθμός X μέ 0<X<1 μπορεῖ νά γραφῆ

$$X=\frac{\alpha_1}{B}+\frac{\alpha_2}{B^2}+\frac{\alpha_3}{B^3}+\frac{\alpha_4}{B^4}+\ldots$$

Τά ψηφία α_1, α_2, α_3 εἶναι θετικοί ἀκέραιοι ἀπό τό σύνολο $\{0,1,2,\ldots,B-1\}$ καί εὑρίσκονται ὡς ἑξῆς:

α_1 = 'Ακέρ. μέρος$(X\cdot B)$

α_2 = 'Ακέρ. μέρος$((X\cdot B-\alpha_1)\cdot B)$

α_3 = 'Ακέρ. μέρος$(((X\cdot B-\alpha_1)\cdot B-\alpha_2)\cdot B)$ κ.ο.κ.

Τό πρόγραμμα γιά τήν εὕρεση τῶν $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots$ δοθέντων τῶν B καί X ἔχει ὡς ἑξῆς (Μόνο τά λίγα πρῶτα ἐκ τῶν ψηφίων α_1, $\alpha_2,\alpha_3,\ldots$ πού εὑρίσκει εἶναι σωστά):

```
C   P9.21  GRAFH PRAGMATIKON ARITHMON OS PROS BASH B
      INTEGER  B,  A(100)
      B=16
      FB=FLOAT(B)
      X=0.1
      Y=X*FB
      A(1)=INT(Y)
      DO 11 I=2,100
      Y=(Y-FLOAT(A(I-1)))*FB
   11 A(I)=INT(Y)
      WRITE(6,200) X,B,A
  200 FORMAT(1H0,4H TO ,E15.7,23H GRAFETAI STH BASH   B= ,
     $       I2/1H ,6X,2H0.,4(25(I2,1H-)/9X))
      STOP
      END
```

P10.5 'Εάν ὁ x διαιρεῖται μέ τόν πρῶτο $p \geq \sqrt{x}$ τότε ἰσχύει $x=p \cdot q$ μέ $q \leq \sqrt{x}$, ἄρα ὁ x διαιρεῖται καί μέ ἕναν $q \leq \sqrt{x}$. 'Εάν ἀντιστρόφως ὁ x δέν διαιρεῖται μέ κανέναν $p<\sqrt{x}$, τότε κατά τήν προηγούμενη πρόταση δέν θά διαιρεῖται καί μέ κανέναν $p>\sqrt{x}$.

```
C   P10.6  EYRESH PROTON ARITHMON
        INTEGER  P,X,RIZA
        DIMENSION   P(1000)
        DATA P(1),P(2)/2,3/
        N=271
C
C   O 11-DO-KYKLOS YPOLOGISEI TA P(3),....,P(1000)
        DO 11 I=3,1000
          X=P(I-1)
    22    X=X+2
          RIZA=INT(SQRT(FLOAT(X)))
C
C   ELEGXOS
          M=1
    33    M=M+1
          IF(P(M).GT.RIZA) GO TO 44
C
C   OTAN O X DIAIREITAI ME TO P(M), TOTE X DEN EINAI PROTOS
          IF(X-X/P(M)*P(M).EQ.0) GO TO 22
          GO TO 33
C
C   PROSDIORISMOS TOY EPOMENOY PROTOY
    44    P(I)=X
        IF(P(I).GT.N) GO TO 55
    11 CONTINUE
C   EKTYPOSH
    55 I=I-1
        WRITE(6,1000)  (J,P(J),J=1,I)
  1000 FORMAT(4(5H   P(,I4,2H)=,I5))
        STOP
        END
```

```
C   P10.7  EXETASH ARITHMOY, AN EINAI PROTOS H OXI
        NDIDO=751
        N=NDIDO
C   ARXIZOME NA DIAIROYME TO N ME TA 2,3,....
        I=1
     2 I=I+2
        IF(I.LE.4) I=I-1
        IF(I**2.GT.N) GO TO 3
        NP=N/I
        NY=N-NP*I
        IF(NY.NE.0) GO TO 2
C   EAN NY=0 , TOTE TO I DIAIREI TO N
        WRITE(6,200) N
   200 FORMAT(1H ,2H O,I5,17H DEN EINAI PROTOS)
        STOP
```

```
    3 WRITE(6,300) N
  300 FORMAT(1H ,2H 0,I5,13H EINAI PROTOS )
      STOP
      END

C   P10.8  EYRESH DEIKTON, MEGISTHS-ELAXISTHS SYNISTOSAS TOY
C          DIANYSMATOS
      DIMENSION    X(100)
C   EFODIASMOS TOY X ME TIMES
      N=3675
      XN=FLOAT(32768)
      DO 11 I=1,100
      N=MOD(N*32581,32768)
      X(I)=FLOAT(N)/XN
   11 CONTINUE
      WRITE(6,300) X
  300 FORMAT(1H ,5E13.5)
      WRITE(6,99999)
99999 FORMAT(1H0)
      NX=100
      IMAX=1
      IMIN=1
      DO 1 I=2,NX
      IF(X(I).GT.X(IMAX)) IMAX=I
      IF(X(I).LT.X(IMIN)) IMIN=I
    1 CONTINUE
      WRITE(6,100) IMIN,X(IMIN)
      WRITE(6,200) IMAX,X(IMAX)
  100 FORMAT(1H ,3H X(,I3,2H)=,E12.5,15H ELAXISTO TON X )
  200 FORMAT(1H ,3H X(,I3,2H)=,E12.5,15H MEGISTO TON X  )
      STOP
      END

C   P10.9  EYRESH DEIKTON SYNISTOSON DIANYSMATOS
C          POY EYRISKONTAI ENTOS DOTHISHS PERIOXHS
      DIMENSION   X(1000)
C   EFODIASMOS TOY X ME TIMES
      NX=200
      N=3671
      XN=FLOAT(32768)
        DO 11 I=1,NX
        N=MOD(N*32581,32768)
        X(I)=FLOAT(N)/XN
   11 CONTINUE
C   ORISMOS PERIOXHS
      Y=0.3333333333333333333333333333333
      E=0.0200000000000000000000000000000
      WRITE(6,100) Y,E
        DO 22 I=1,NX
        IF(ABS(X(I)-Y).LT.E) WRITE(6,200) I,X(I)
   22 CONTINUE
  100 FORMAT(1H ,2HY=,E15.7,4H, E=,E15.7/
     $        12H0 TA EPOMENA , 14H X EYRISKONTAI ,
     $        29H ENTOS THS PERIOXHS (Y-E,Y+E)      )
  200 FORMAT(1H ,2HX(,I4,2H)=,E14.7)
      STOP
      END
```

```
C   P10.10  KATASKEYH TAYTOTIKHS MHTRAS
C
      INTEGER  A(10,10)
      DATA  A /100*0/
      NDIA=1
        DO 1 I=1,10
        A(I,I)=NDIA
    1 WRITE(6,100)  (A(I,J),J=1,10)
      NDIA=1
  100 FORMAT(1H0,10I4)
      STOP
      END
C   P10.11  TO TRIGONO TOY PASCAL
      INTEGER C(100)
      DATA C(1),C(2)/2*1/
C   OI DYO PROTES SEIRES
      WRITE(6,100) C(1)
      WRITE(6,100) C(1),C(2)
  100 FORMAT(3H   ,20I6)
C   OI YPOLOIPES SEIRES
      N=16
        DO 11 I=3,N
        K=I-1
        H1=1
          DO 22 L=2,K
          H2=H1+C(L)
          H1=C(L)
          C(L)=H2
   22   CONTINUE
        C(I)=1
        WRITE(6,100) (C(J),J=1,I)
   11 CONTINUE
      STOP
      END
C   P10.12  DIATAXH DIANYSMATOS
      DIMENSION X(10)
      DATA  X/-3.,-7.,-11.,2*5.,-20.,1.,3.,1.5,0./
      N=10
C   DIATAXH TOY X
      DO 1  I=2,N
      P=X(I)
      I1=I-1
            DO 2 J=1,I1
C   SYGRISH TOY P=X(I), ME TA X(1),...,X(I-1).
            IF(P.LT.X(I-J)) GO TO 3
            X(I-J+1)=P
            GO TO 1
    3       X(I-J+1)=X(I-J)
    2       CONTINUE
      X(1)=P
    1 CONTINUE
C
C   EKTYPOSH
      WRITE(6,200) (X(I),I=1,N)
  200 FORMAT(1H ,4E15.7)
      STOP
      END
```

P11.2 (I) Ἡ πρώτη κάρτα δεδομένων τοῦ προγράμματος, πρέπει νά περιέχη τό πλῆθος τῶν B(I) πού θά διαβασθοῦν. Οἱ ἑπόμενες κάρτες περιέχουν τά B(I). Κάθε ἀριθμός καταλαμβάνει στήν κάρτα 8 τυπογραφικές θέσεις (κολῶνες).
(II) Τυπώνονται τά B(I) ἀπό 5 σέ κάθε γραμμή καταλαμβάνοντας 10 τυπογραφικές θέσεις τό καθένα.

P11.4 Ὑπάρχουν πολλές δυνατότητες, μία ἐξ' αὐτῶν εἶναι ἡ
```
100 FORMAT(E5.0,F7.1,F3.0,I5,I7,G8.0,E7.4)
```

P11.5 Ἀντικατάστησε τά FORMAT τοῦ P11.1 μέ τά
```
200 FORMAT(10G8.3)
300 FORMAT(5G11.3)
```

P11.6 Διάβασμα : 0.0000001
Γράψιμο : 0.001

P11.7 Διάβασμα : -0.000001
Γράψιμο : -0.001

P11.8 Διάβασμα : -999999.
Γράψιμο : -999.999

```
C  P11.9
      X=12345.67
      I=-12345
      WRITE(6,100) X,I
  100 FORMAT(3H X=,F8.3/3H I=,I5)
      STOP
      END
```

Ἀντί τῶν ἀριθμῶν τυπώνονται στήν θέση τους 8 ἀντ. 5 ἀστεράκια πού σημαίνει ὅτι οἱ ἀριθμοί ὑπερβαίνουν τίς δυνατότητες τοῦ κώδικα μέ τόν ὁποῖο γράφονται.

```
C  P11.10
      REAL X(15)
      READ(5,100) (X(I),I=1,15)
  100 FORMAT(5F11.0)
      DO 1 I=1,15
    1 WRITE(6,200) X(I),X(I),X(I)
  200 FORMAT(5X,F11.4,5X,E11.4,5X,G11.4)
      STOP
      END
```

P11.11 Ἀντί τῶν τεσσάρων πρώτων ἐντολῶν τοῦ P2.2 βάλε τίς :
```
      READ(5,200) A,B,C
  200 FORMAT(3F10.0)
```
ἀναλόγως τροποποίησε καί τά P3.1 καί P3.2 .

P11.12 Στό P4.6 ἀντικατάστησε τά N1=1000,N2=1100 μέ τά :
```
      READ(5,800) N1,N2
  800 FORMAT(2I10)
```

P11.13 Στό P6.3 άντικατάστησε τίς τρεῖς πρῶτες έντολές μέ τίς ἑξῆς :

```
      READ(5,800) N
  800 FORMAT(I10)
      DO  1111  IEX=1,N
      READ(5,900) A,B,C
  900 FORMAT(3F10.0)
```

καί μετά τήν έντολή WRITE(6,600) A,B,C,X1R πρόσθεσε τήν

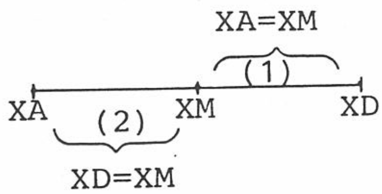
```
 1111 CONTINUE
```

```
C  P11.15  ESOTERIKO GINOMENO DIANYSMATON
      DIMENSION  X(1000),Y(1000)
      READ(5,100) N
      READ(5,200) (X(I),I=1,N)
      READ(5,200) (Y(I),I=1,N)
      WRITE(6,300) (X(I),I=1,N)
      WRITE(6,400) (Y(I),I=1,N)
      S=0.
      DO 1 I=1,N
    1 S=S+X(I)*Y(I)
      WRITE(6,500) S
  200 FORMAT(8F10.0)
  100 FORMAT(I10)
  300 FORMAT(16HOTO DIANYSMA X=  /,(3X,5F10.3/))
  400 FORMAT(16HOTO DIANYSMA Y=  /,(3X,5F10.3/))
  500 FORMAT(24HOTO ESOTERIKO GINOMENO =  ,F15.4)
      STOP
      END
```

```
C  P11.16  POLLAPLASIASMOS MHTRON
      REAL  A(10,10), B(10,10) , C(10,10)
      READ(5,100)  N1,N2,N3
C  DIABASE / TYPOSE TIS MHTRES A KAI B
      DO 11 I=1,N1
      READ(5,200)  (A(I,J),J=1,N2)
   11 WRITE(6,300) (A(I,J),J=1,N2)
      WRITE(6,2000)
      DO 22 I=1,N2
      READ(5,200)  (B(I,J),J=1,N3)
   22 WRITE(6,300) (B(I,J),J=1,N3)
      WRITE(6,2000)
C  POLLAPLASIASE KAI TYPOSE  C=A*B
      DO 33 I=1,N1
        DO 44 J=1,N3
        S=0.
          DO 55 K=1,N2
 55       S=S+A(I,K)*B(K,J)
 44     C(I,J)=S
 33   WRITE(6,300)  (C(I,L),L=1,N3)
 100  FORMAT(3I10)
 200  FORMAT(8F10.0)
 300  FORMAT(10F10.3)
 2000 FORMAT(1H0,///)
      STOP
      END
```

```
C  P11.17  ANAGNOSH KAI DIATAXH ARITHMON
      DIMENSION  X(1000)
      READ(5,100) N
      READ(5,300) (X(I),I=1,N)
      WRITE(6,200) (X(I),I=1,N)
100   FORMAT(I10)
300   FORMAT(8F10.0)
      WRITE(6,99999)
C
C  DIATAXH TOY X
      N1=N-1
      DO  1  I=1,N1
      M=I+1
           DO 2 J=M,N
           IF (X(I).LE.X(J)) GO TO 2
           H=X(J)
           X(J)=X(I)
           X(I)=H
    2      CONTINUE
    1 CONTINUE
C
C  EKTYPOSH
      WRITE(6,200)(X(I),I=1,N)
200   FORMAT(1H ,5G12.4)
99999 FORMAT(1H0)
      STOP
      END
```

P12.4 'Εάν F(XM)*F(XA)>0 τότε τό νέο διάστημα εἶναι τό (1). 'Εάν F(XM)*F(XA)$\leq$0 τότε τό νέο διάστημα εἶναι τό (2) .



P12.5 Μόνο τήν συνάρτηση F(X),
F(X)=(X*X-2.5)*X-6.

P12.6 'Αντικατάστησε τίς 3 πρῶτες έντολές τοῦ P12.1 μέ τίς ἐπόμενες :

```
      F(X)=((A1*X+A2)*X+A3)*X+A4
      READ(5,100) A1,A2,A3,A4,A,B,E
  100 FORMAT(8F10.0)
```

P12.7 Χρησιμοποιῶντας τό P12.6 μέ A1=1.,A2=A3=0.,A4=-C ὅπου C ὁ ἀριθμός τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ τρίτη ρίζα. 'Εάν C>0 μποροῦμε νά πάρουμε A=0., B=1.+C .

P12.8 'Εάν χρησιμοποιήσουμε τό ὄνομα MI τότε πρέπει στήν ἀρχή τοῦ προγράμματος νά προσθέσωμε τίς ἐντολές :

```
      REAL MI
      MI(X)=X-COS(X)
```

P12.9 'Εάν C ὁ θετικός ἀριθμός, τότε ἀντικαθιστῶντας στό P12.1 τήν F μέ τήν
F(X)=X*X-C
καί παίρνοντας A=0.,B=C+1. εὑρίσκουμε τήν θετική ρίζα $\sqrt{C}$.

P12.10 Γιά έκεῖνες γιά τίς όποῖες ίσχύει F(A)*F(B)>0 .

P12.11 Χρησιμοποίησε τό P12.1 μέ
F(X)=TAN(X)-2.*X
καί A=0.1, B=1.567 .

P12.12 Πρόσθεσε στό P12.1 τίς έξῆς έντολές :
1ον) μετά τό πρῶτο READ :
```
      IF(F(A)*F(B).GT.0.) GO TO 44
```
2ον) μετά τό STOP τοῦ προγράμματος :
```
   44 WRITE(6,300)
  300 FORMAT(1H0,16H**** H SYNARTHSH,
     $        26H F DEN PLHROI THN SYNTHIKH,
     $        16H F(A)*F(B).LE.0.    )
```

P12.13 Χρησιμοποίησε τό P12.1 άντικαθιστῶντας τήν F μέ
τήν : F(X)=(X*X*X*X+10.)*X+1.
άντ.: F(X)=X**X+2.*X-6.
άντ.: F(X)=X**7-X-1.
καί γιά τίς τρεῖς χρησιμοποίησε A=1., B=2.

P12.14 Στό P12.12 άντικατάστησε τήν F μέ τήν
F(X)=ALOG(X)-1./X
άντιστ. F(X)=4.*X-7.*SIN(X)
καί γιά τίς δυό πάρε A=1., B=2.

P12.15 'Εάν τό ξ πληροῖ τήν $\xi^3-\xi-1=0$ $(f(\xi)=0)$, τότε τό $\eta = \xi^3$ πληροῖ προφανῶς τήν $\eta = \sqrt[3]{\eta}+1$ ($\eta = \varphi(\eta)$). 'Αντιστρόφως, έάν τό η πληροῖ τήν $\eta = \varphi(\eta)$ τότε $\sqrt[3]{\eta}$ εἶναι ρίζα τῆς f .

P12.17 Χρησιμοποιοῦμε τό P12.2 καί εὑρίσκουμε τό σταθερό σημεῖο $\eta=\varphi(\eta)$ τῆς
$$\varphi(x)=\sqrt[2n+1]{x}+1 ,$$
κατόπιν παίρνουμε τό
$$\xi = \sqrt[2n+1]{\eta} .$$
Τοῦτο εἶναι ρίζα τῆς
$$x^{2n+1}-x-1 = 0 .$$

P12.18 'Αντικατάστησε τήν F(X) τοῦ P12.3 μέ τήν
F(X)=ALOG(X)
καί πάρε: AR=1. , DE=1001., N=1001

P12.19 'Αντικατάστησε στό P12.3 τήν F μέ τήν
F(X)=X*X/X
AR=1., DE=11., N=1001
Τοῦτος καί ό προηγούμενος πίνακας δίδει μιά ίδέα γιά τά σφάλματα τοῦ ὑπολογιστῆ.

P12.20 'Εάν έξαιρέσουμε τήν μηδενική συνάρτηση $2^6-1=63$ συναρτησεις.

P12.21 Τά I0, I1, I2, I3 ὁρίζονται πρίν τήν ἐκτύπωση μιᾶς νέας σελίδας. Κάθε σελίδα περιέχει 200 ζεύγη τό πολύ. Ἡ τελευταία σελίδα μπορεῖ νά περιέχη λιγώτερα τῶν 200 ζευγῶν (ἀνάλογα μέ τό δοθέν N). Τοῦτο ἀκριβῶς εἶναι τό λεπτό σημεῖο στήν κατασκευή τοῦ πίνακα. Κάθε σελίδα τοῦ πίνακα περιέχει 4 τό πολύ στῆλες. Μιά πλήρης στήλη περιέχει 50 ζεύγη γιά 50 διαδοχικές τιμές τοῦ X . Γιά τήν ἐκτύπωση τῆς τελευταίας σελίδας παίζουν τά I2, I3 σημαντικό ρόλο. Πρῶτα ἐκτυπώνονται οἱ πρῶτες I3 τό πλῆθος γραμμές οἱ ὁποῖες περιέχουν καί τά ζεύγη τῆς μή πλήρους στήλης (μήν ξεχνᾶς ὅτι μέ κάθε WRITE τυπώνει ὁ ἐκτυπωτής μιά ὁλόκληρη γραμμή) κατόπιν τυπώνονται οἱ ὑπόλοιπες γραμμές τῆς σελίδος.

```
C  P12.22  PINAKAS TIMON SYNARTHSEON
      DIMENSION  X(4),Y(4)
      F(X)=A*X+B*X**2+C*ALOG(X**2+1.)+D*TAN(X)+E*SIN(X)+G*X*COS(X)
C
C  GIA NA ORISOYME PLHROS THN SYNARTHSH PREPEI NA DOSOYME
C  TIMES STIS PARAMETROYS A,B,C,D,E,G
      READ(5,100) A,B,C,D,E,G
  100 FORMAT(6G10.0)
C
C  DIABASE TO DIASTHMA  (AR,DE) ,  TO PLHTHOS TON ISAPEXONTON
C  SHMEION = N,  BHMA= TO BHMA ME TO OPOIO AYXANEI TO X
  200 FORMAT(2G10.3,I5)
      READ(5,200) AR,DE,N
      BHMA=(DE-AR)/FLOAT(N-1)
C
C  TYPOSE TA A,B,C,D,E,G,AR,DE,N
      WRITE(6,300) A,B,C,D,E,G
      WRITE(6,400) AR,DE,N
  300 FORMAT(5X,2HA=,G14.7/5X,2HB=,G14.7/5X,2HC=,G14.7/5X,
     *       2HD=,G14.7/5X,2HE=,G14.7/5X,2HG=,G14.7)
  400 FORMAT(14H0    (AR,DE)=(,G14.7,1H,,G14.7,6H),   N=,I5)
C
C  TYPOSE TON PINAKA : TESSEREIS KOLONES ZEYGON (X,Y),
C  50 GRAMMES SE KATHE SELIDA, ARA 200 ZEYGH ANA SELIDA.
C  M   =OLIKOS ARITHMOS SELIDON PROS EKTYPOSH
      M=(N-1)/200+1
      DO 22 I=1,M
         WRITE(6,500)
C
C   I0 =PLHTHOS ZEYGON POY EXOYN HDH TYPOTHEI
C   I1 =PLHTHOS ZEYGON PROS EKTYPOSH STHN I-SELIDA
C   I2 =PLHTHOS PLHRON STHLON (50 GRAMMES) THS I-SELIDAS
C   I3 =PLHTHOS STOIXEION MH PLHROYS STHLHS STHN I-SELIDA
         I0=(I-1)*200
         I1=MIN0(200,N-I0)
         I2=I1/50
         I3=I1-I2*50
         IF(I3.EQ.0) GO TO 32
C  OI I3 PROTES GRAMMES THS I-SELIDAS
C
```

```
      DO 33 J=1,I3
      J1=I0+J
      I2SYN1=I2+1
        DO 34 K=1,I2SYN1
        X(K)=AR+FLOAT(J1+(K-1)*50-1)*BHMA
   34   Y(K)=F(X(K))
      WRITE(6,600)  (X(K),Y(K),K=1,I2SYN1)
   33 CONTINUE
C
   32   IF(I2.EQ.0)  STOP
        I3=I3+1
C
C  OI YPOLOIPES GRAMMES THS I SELIDAS
      DO 44 J=I3,50
      J1=I0+J
      DO 45 K=1,I2
      X(K)=AR+FLOAT(J1+(K-1)*50-1)*BHMA
   45 Y(K)=F(X(K))
      WRITE(6,600)  (X(K),Y(K),K=1,I2)
   44 CONTINUE
   22 CONTINUE
C
  500 FORMAT(1H1,4(10X,1HX,14X,1HY,7X)//)
  600 FORMAT(4(3X,2G15.7))
      STOP
      END
```

P12.23 Ἀντικατάστησε τήν FI(X)=X**(1./3.)+1. τοῦ P12.2 μέ τίς ἐντολές :

```
        F(X)=3.*X-EXP(X)          }
        FTONOS=3.-EXP(X)          } (*)
        FI(X)=X-F(X)/FTONOS(X)
```

ἐπίσης στήν κάρτα δεδομένων πάρε X(1)=1.5 .
Γιά τίς ὑπόλοιπες ἀσκήσεις ἀρκεῖ νά ἀλλάξωμε τίς δύο κάρτες (*) καί τό X(1) στήν κάρτα δεδομένων.

P12.24 Ἐφάρμοσε τό P12.2 γιά τήν συνάρτηση

```
        FI(X)=0.5*(X+A/X)
```

ἀντικαθιστῶντας τό READ μέ τίς ἐντολές :

```
        READ(5,100) A,E,FRAGMA
        X(1)=A
```

P12.25 Ἐφάρμοσε τό P12.2 γιά τήν συνάρτηση

```
        FI(X)=X-(X**K-A)/FLOAT(K)*X**(K-1)
```

ἀντικαθιστῶντας τό READ μέ τίς ἐντολές :

```
        READ(5,100) A,E,FRAGMA,K
    100 FORMAT(3G10.3,I10)
        X(1)=A
```

P12.26 Ἐφάρμοσε τό P12.2 γιά τήν συνάρτηση

```
        FI(X)=X*(2.-A*X)
```

ἀντικαθιστῶντας τό READ τοῦ P12.2 μέ τίς ἐντολές :

```
        READ(5,100) A,E,FRAGMA
```

```
100 FORMAT(3G10.3)
    X(1)= 1./FLOAT(INT(A)+1)
```

P12.27 Γιά τήν ἀκολουθία $a_n = \cos(\frac{1}{\sqrt{n}})$ χρησιμοποίησε τό P12.3 ἀντικαθιστῶντας τήν F μέ τήν

```
F(X)=COS(1./SQRT(X))
```

ἀφαιρῶντας τό READ(5,100) καί παίρνοντας AR=1.,DE=200.,N=200 'Αναλόγως τροποποίησε καί γιά τίς ἄλλες ἀσκήσεις.

P13.7

'Εάν B=16, ν=6, τότε κάθε ἀριθμός θά παρίσταται σύμφωνα μέ τόν τύπο (*) τῆς σελ.92 ὑπό μορφήν :

$$\alpha = \pm\left(\frac{\alpha_1}{16} + \frac{\alpha_2}{16^2} + \frac{\alpha_3}{16^3} + \frac{\alpha_4}{16^4} + \frac{\alpha_5}{16^5} + \frac{\alpha_6}{16^6} \right)\times 16^e$$

ὅπου α_i εἶναι στοιχεῖα τοῦ συνόλου $\{0,1,2,3,\dots,14,15\}$.

1ον) Γιά $\alpha=1.$, εἶναι $\alpha_1=1$, $\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=\alpha_6=0$, $e=1$

Γιά $\alpha=0.1$ εἶναι $\alpha_1=$'Ακερ. μέρος$(0.1\times16)=1$

$\alpha_2=$'Ακερ. μέρος$((0.1\times16-\alpha_1)\times16)=9$

$\alpha_3=$ 'Ακερ. μέρος$(((0.1\times16-\alpha_1)\times16-\alpha_2)\times16)=9$

κ.ο.κ.

συνεπῶς γιά $\alpha=0.1$ εἶναι $\alpha_1=1,\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=\alpha_6=9$, $e=0$ 'Αναλόγως ὑπολογίζεται ἡ παράσταση τοῦ 0.2 .

2ον) Γιά $\alpha=0.1$ ὑπολογίσαμε τήν παράσταση τοῦ

$$\alpha \sim \frac{1}{16} + \frac{9}{16^2} + \frac{9}{16^3} + \frac{9}{16^4} + \frac{9}{16^5} + \frac{9}{16^6} =$$

3ον) Σύμφωνα μέ τό 1ον) τό 1 παρίσταται μέ

$$1 \sim \left(\frac{1}{16} + \frac{0}{16^2} + \frac{0}{16^3} + \frac{0}{16^4} + \frac{0}{16^5} + \frac{0}{16^6}\right)\times 16$$

ὁ ἑπόμενος ἀριθμός τοῦ 1 , ὁ ὁποῖος δέν στρογγυλεύεται κατά τήν γραφή του στό σύστημα αὐτό εἶναι ὁ

$$\left(\frac{1}{16} + \frac{0}{16^2} + \frac{0}{16^3} + \frac{0}{16^4} + \frac{0}{16^5} + \frac{1}{16^6}\right)\times 16 = 1+ \frac{1}{16^5}$$

'Ο ἀριθμός $1+ \frac{1}{16^5} + \frac{1}{16^6}$ στρογγυλεύεται στόν $1+ \frac{1}{16^5}$.

P13.8 Ὅπως εἴδαμε στό P13.7 ὁ 0.1 γράφεται στό σύστημα μέ βάση 16 :

$$0.1 = \frac{1}{16} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{9}{16^n}$$

κρατῶντας μόνο τά 6 πρῶτα ψηφία ὡς πρός τό 16-δικό σύστημα παίρνουμε

$$0.1 = \frac{1}{16} + \frac{9}{16^2} + \frac{9}{16^3} + \frac{9}{16^4} + \frac{9}{16^5} + \frac{9}{16^6} + \varepsilon$$

ὅπου $\varepsilon=\sum_{n=7}^{\infty} \frac{9}{16^n} = \frac{9}{16^7}\times\frac{1}{1-\frac{1}{16}}$. ε εἶναι τό σφάλμα λόγω τῆς ἀποκοπῆς τῶν ὑπολοίπων ψηφίων. Κατά τήν πρόσθεση 0.1+0.1+0.1 +0.1...(10 φορές) τό ὁλικό σφάλμα θά εἶναι τουλάχιστον 10×ε.

```
C   P13.8   SFALMA METATROPHS STO 16-DIKO  SYSTHMA
C           ME SYGRATHSH 6 PSIFION
      DO  1  I = 1 , 10
  1   S=S+0.1
      WRITE(6,100)  S
 100  FORMAT(E20.10)
      STOP
      END
```

P13.10 ʼΑφαίρεσε ἀπʼ τό P13.3 τίς 2 πρῶτες ἐντολές καί ἀντικατάστησε μέ τίς

```
PESO=2.*SQRT(2.)
PEXO=4.
PESO=SQRT(PESO*PEXO)
```

Στό 200 FORMAT ἀντικατάστησε τό D μέ E , ἀφαίρεσε τό IF καί πρόσθεσε ἀμέσως μετά τήν ἐντολή μέ μάρκα 33 τήν

```
IF(NPLEYR.EQ.2**30) STOP
```

ʼΑνάλογες εἶναι οἱ ἀλλαγές πού πρέπει νά γίνουν καί γιά τίς ἀσκήσεις P13.11 - P13.13 .

```
C   P13.14   REGULA FALSI
C
      DOUBLE PRECISION  X(30), F, E, D, FMEGA, Y1, Y2
      F(X)=X-DCOS(X)
      NMAX=30
      READ(5,100)  X(1),X(2),E,D,FMEGA
      I=1
      Y1=F(X(1))
      Y2=F(X(2))
      WRITE(6,200)  I,X(1),I,Y1,E,D,FMEGA
      I = 2
      WRITE(6,300)  I,X(2),I,Y2
C  YPOLOGISMOS KAI EKTYPOSH TON X(3),X(4),...
      DO  11  I  =  3 , NMAX
        IF(DABS(Y2-Y1).LT.D)  GO TO 22
        X(I)=X(I-1)-(X(I-1)-X(I-2))/(Y2-Y1)*Y2
        Y1=Y2
        Y2=F(X(I))
        WRITE(6,300)  I,X(I),I,Y2
        IF(DABS(Y2).LT.E) GO TO 33
        IF(DABS(Y2-Y1).GT.FMEGA) GO TO 44
 11   CONTINUE
      WRITE(6,400) NMAX
 400  FORMAT(1H0,9H**** META,I3,10H BHMATA O ,
     $        36HALGORITHMOS DEN PLHROI TO E-KRITHRIO  )
      STOP
 22   I1=I-1
      I2=I-2
      WRITE(6,500) I1,I2
 500  FORMAT(1H0,14H**** DABS(F(X(,I2,7H))-F(X(,I2,
     $        8H))).LT.D  )
      STOP
 33   WRITE(6,600) I
 600  FORMAT(1H0, 7H**** X(,I2,23H)  PLHROI TO E-KRITHRIO )
      STOP
```

```
44     WRITE(6,700) I,I-1
 700   FORMAT(1H0,14H**** DABS(F(X(,I2,7H))-F(X(,I2,7H))).GT.,
     $        5HFMEGA)
  100  FORMAT(5D15.0)
200    FORMAT(1H ,2HX(,I2,2H)=,D20.10,4H  Y(,I2,2H)=,
     $       D20.10,4H  E=,D20.10,4H  D=,D20.10,8H  FMEGA=,D20.10)
300    FORMAT(1H ,2HX(,I2,2H)=,D20.10,4H  Y(,I2,2H)=,D20.10)
       STOP
       END
```

```
C   P13.15   ASKHSH ME MIGADIKOYS ARITHMOYS
       COMPLEX        Z,ZN
       READ(5,100)   FI,N
       Z=CMPLX(COS(FI),SIN(FI))
       ZN=CMPLX(0.,0.)
       DO 1 I=1,N
     1 ZN=ZN+Z**I
       CN=REAL(ZN)
       SN=AIMAG(ZN)
       WRITE(6,200)   FI,N,CN,SN
100    FORMAT(1F10.0,I10)
  200  FORMAT(1H ,3HFI=,1P1E15.7,3H N=,I4/1X,3HCN=,1P1E15.7,
     *        4H SN=,1P1E15.7)
       STOP
       END
```

```
C   P13.16   LOGIKES EKFRASEIS KAI METABLHTES
C
       LOGICAL        A
       DIMENSION      IN(80)
       READ(5,100)    IN
  100  FORMAT(80I1)
       J=0
       DO 1 I =1,80
       IF(IN(I).EQ.1) J=J+1
     1 CONTINUE
       A=.FALSE.
       IF(J.GT.9) A=.TRUE.
       WRITE(6,200) A
  200  FORMAT(1L30)
       STOP
       END
```

```
C   P13.17   MIGADIKES N-STES RIZES ENOS MIGADIKOY
       COMPLEX  Z(99),AI(99),A
       PI=3.1415926
       N=4
       A=(16.,0.)
       OMEGA=2.*PI/FLOAT(N)
       RO=CABS(A)
       RORIZN=RO**(1./FLOAT(N))
       WRITE(6,100)   N,N,A
```

```
      DO 11 I=1,N
       FI=OMEGA*FLOAT(I-1)
       Z(I)=CMPLX(COS(FI),SIN(FI))
       AI(I)=RORIZN*Z(I)
       WRITE(6,200) I,Z(I),I,AI(I)
 11   CONTINUE
 100  FORMAT(1H0,3X,I2,21H-STES RIZES TOY 1.    ,  ,3X,
     $       I2,19H-STES RIZES TOY A=(,F5.2,1H,,F5.2,1H)//)
 200  FORMAT(3H    ,2HZ(,I2,3H)=(,F8.5,1H,,F8.5,1H),2X,
     $       3HAI(,I2,3H)=(,F12.5,1H,,F12.5,1H))
      STOP
      END
```

P13.18 LOGICAL RING

```
        RING(X,Y)=RMIKRO.LT.X*X+Y*Y.AND.X*X+Y*Y.LT.RMEGA
```

P14.5 Πρόσθεσε στήν ἀρχή τοῦ προγράμματος P14.1 τήν

```
        DOUBLE PRECISION X,Y,F
```

ἀντικατάστησε μέ τήν

```
        X(I)=-5.D0+DFLOAT(I-1)*0.1D0
```

καί τό γράμμα D ἀντί τοῦ E στό 100 FORMAT , ἐπίσης στό ὑπο-πρόγραμμα ἀντικατάστησε τίς πρῶτες ἐντολές μέ τίς :

```
        DOUBLE PRECISION FUNCTION F(X)
        DOUBLE PRECISION X
        IF(DABS(X).GT.1.D0) GO TO 33
```

ἐπίσης τίς :

```
     33 IF(X.LT.0.D0) GO TO 44
        F=1.D0/X
     44 F=-X-DLOG(-X)
```

Ἀνάλογες εἶναι καί οἱ μετατροπές γιά τό P14.2 .

```
C  P14.6    H ORIZOYSA MIAS TRIA EPI TRIA MHTRAS
      DIMENSION A(3,3)
      DO 1 I =1,3
      READ(5,100)(A(I,J),J=1,3)
1     WRITE(6,200)(A(I,J),J=1,3)
      X=OR(A)
      WRITE(6,200) X
100   FORMAT(3F10.0)
200   FORMAT(1H0,3F15.5)
      STOP
      END
      REAL FUNCTION  OR(A)
      DIMENSION  A(3,3)
      OR=A(1,1)*A(2,2)*A(3,3)+A(1,2)*A(2,3)*A(3,1)+A(1,3)*A(2,1)
     $   *A(3,2)-A(3,1)*A(2,2)*A(1,3)-A(3,2)*A(2,3)*A(1,1)-
     $    A(2,1)*A(1,2)*A(3,3)
      RETURN
      END
```

```
C   P14.7   O MEGISTOS KOINOS DIAIRETHS
        INTEGER FUNCTION MKD(MA,NA)
        INTEGER P,Y
        M=MA
        N=NA
    33  P=M/N
        Y=M-P*N
C   EAN Y=0, TOTE N=M.K.D TUN M,N
C   ALLOS PARE  M=N, N=Y KAI EPANELABE THN DIADIKASIA
        IF(Y.EQ.0) GO TO 77
        M=N
        N=Y
        GO TO 33
77      CONTINUE
        MKD=N
        RETURN
        END


C   P14.8    METABLHTES DIASTASEIS STIS
C            SYNARTHSEIS YPOPROGRAMMATA
C
C
        DIMENSION  A(3),B(3)
        READ(5,100) A,B
   100  FORMAT(10E8.0)
        APOSAB=APO(A,B,3)
        WRITE(6,200) A, B, APOSAB
   200  FORMAT(1H ,5X,3X,3HA=( ,1P3E15.7,1H)/6X,3HB=( ,
      1        1P3E15.7,1H)/9X,9HAPOSTASH=,1P1E15.7)
        STOP
        END
        REAL FUNCTION APO(X,Y,N)
        DIMENSION  X(N),Y(N)
        APO=0.
        DO 11 I=1,N
    11  APO=APO+(X(I)-Y(I))*(X(I)-Y(I))
        APO=SQRT(APO)
        RETURN
        END


C   P14.9   H ZHTA SYNARTHSH
        DOUBLE PRECISION FUNCTION ZETA(N,P)
        DOUBLE PRECISION SS,PI,PP
        INTEGER     P
        SS=1.
        DO 1 I=1,N
        PI=1./DFLOAT(I)
        PP=1.
        DO 2 J=1,P
     2  PP=PP*PI
     1  SS=SS+PP
        ZETA=SS
        RETURN
        END
```

```
C  P14.10
      REAL FUNCTION HORNER(A,N,X)
      DIMENSION       A(N)
      H=A(1)
      DO 1 I=2,N
    1 H=H*X+A(I)
      HORNER=H
      RETURN
       END
```

```
C  P14.11
      INTEGER FUNCTION DEKA(A,N,B)
      INTEGER A,B,H
      DIMENSION       A(N)
      H=A(1)
      DO 1 I=2,N
    1 H=H*B+A(I)
      DEKA = H
      RETURN
       END
```

```
C  P14.12
      REAL FUNCTION XMAX(X,N)
      DIMENSION  X(N)
      XMAX=X(1)
      DO 1 I=2,N
      IF(X(I).GT.XMAX) XMAX=X(I)
 1    CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
C  P14.13
      REAL FUNCTION ATHR(X,N)
      DIMENSION X(N)
      ATHR=0.
      DO 1 I=1,N
  1   ATHR=ATHR+X(I)
      RETURN
      END
```

P14.14 Ὄχι. Ὅταν ὁ ὑπολογιστής ἀντικαταστήσῃ τά A,B (τυπικές μεταβλητές τοῦ ὑποπρογράμματος) μέ τίς τιμές πού δίδονται ἀπό τό κύριο πρόγραμμα π.χ. A=2., B=3. τότε θά προκύψουν ἀντιφάσεις λόγω τῶν

```
A=A**2   (2.=4.)
B=B**2   (3.=9.)
```

Γενικώτερα προκύπτει τό ἴδιο σφάλμα ὅταν <u>καί στά δύο</u> σκέλη μιᾶς ἰσότητος ἑνός ὑποπρογράμματος ἐμφανίζονται τυπικές μεταβλητές τοῦ ὑποπρογράμματος. Τό σωστό πρόγραμμα θά ἔπρεπε νά χρησιμοποιῇ δύο βοηθητικές μεταβλητές λ.χ. QA,QB καί θά εἶχε τήν μορφή :

```
      REAL FUNCTION XMESO2(A,B)
      QA=A**2
      QB=B**2
      XMESO2=(QA-QB)/2.
      RETURN
      END
```

```
C  P14.15
      LOGICAL FUNCTION KAI(A,N)
      LOGICAL A(N)
      KAI=.TRUE.
      DO 1 I=1,N
    1 KAI = KAI.AND..A(I)
      RETURN
      END
```

```
C  P14.16
      LOGICAL FUNCTION H(A,N)
      LOGICAL A(N)
      H=.FALSE.
      DO 1 I=1,N
   1  H=H.OR.A(I)
      RETURN
      END
```

P14.17 Στό ἑπόμενο ὑποπρόγραμμα χρησιμοποιοῦμε τήν συνάρτηση :

NMER(NET)=(NET-1)*365+(NET-1)/4-(NET-1)/100+(NET-1)/400

ἡ ὁποία ὑπολογίζει πόσες μέρες μεσολαβοῦν μεταξύ τῶν ἡμερομηνιῶν: 1.1.1 καί 1.1.NET . Οἱ τελευταῖοι τρεῖς προσθεταῖοι ὑπολογίζουν ἐπί πλέον ἡμέρες ἀπό τά δίσεκτα ἔτη πού μεσολαβοῦν. Ἕνα ἔτος εἶναι δίσεκτο ὅταν :

1ον) Διαιρεῖται μέ τό 4 καί

2ον) Ἐάν διαιρεῖται μέ τό 100, τότε διαιρεῖται καί μέ τό 400.

Ἔτσι λ.χ. τά 1980, 1600, 2000 εἶναι δίσεκτα. Τά 1700, 1800, 1900 ἐν τούτοις δέν εἶναι δίσεκτα (Σημείωσε ὅτι κάθε 3333 ἔτη πρέπει νά προστίθεται καί μιά ἡμέρα, τοῦτο ὅμως δέν τό λαμβάνουμε ὑπ᾽ ὄψιν).

```
C  P14.17
      INTEGER FUNCTION MERES(ETOS1,ETOS2)
C  YPOLOGIZEI TO PLHTHOS HMERON METAXY THS
C     1.1.ETOS1 KAI 1.1.ETOS2
      INTEGER  ETOS1 , ETOS2
C  NMER(NET) DIDEI TO PLHTHOS TON HMERON METAXY 1.1.1 KAI 1.1.NET
      NMER(NET)=(NET-1)*365+(NET-1)/4-(NET-1)/100+(NET-1)/400
      N1=NMER(ETOS1)
      N2=NMER(ETOS2)
      MERES=IABS(N1-N2)
      RETURN
      END
```

P14.18 Πρίν προχωρήσουμε στήν κατασκευή τοῦ MER κατασκευάζουμε τό ὑποπρόγραμμα NHM(MERA,MHNA,ETOS) τό ὁποῖο ὑπολογίζει πόσες μέρες μεσολαβοῦν μεταξύ τῆς 1.1.ETOS καί τῆς ἡμερομηνίας : MERA.MHNA.ETOS .

```
      INTEGER FUNCTION NHM(MERA,MHNA,ETOS)
      INTEGER ETOS
      DIMENSION NMHN(12)
      DATA NMHN/0,31,59,90,120,151,181,212,243,273,304,334/
C  TO NMHN(M) PERIEXEI TO PLHTHOS TON HMERON POY MESOLABOYN
C  METAXY THS 1.IANOYARIOY KAI THS 1.M. ENOS ETOYS.
C  ANALOGOS ME TO MHNA EXOME
      DO 1 I=1,12
 1    IF(MHNA.EQ.I) NHM=NMHN(I)+MERA-1
C  EAN TO ETOS EINAI DISEKTO PREPEI NA PROSTHESOME MIA MERA
C  EF' OSON MHNA.GT.2
C  H METABLHTH NDIS=1,0  ANALOGA AN TO ETOS EINAI DISEKTO H OXI
      NDIS=1
      IF(MOD(ETOS,4).NE.0) NDIS=0
      IF(MOD(ETOS,100).EQ.0.AND.MOD(ETOS,400).NE.0) NDIS=0
      IF(MHNA.GT.2) NHM=NHM+NDIS
      RETURN
      END


C  P14.18
      INTEGER FUNCTION MER(ME1,MH1,ET1,ME2,MH2,ET2)
C  YPOLOGIZEI POSES MERES MESOLABOYN METAXY TON HMEROMHNION
C     ME1.MH1.ET1  KAI  ME2.MH2.ET2
C
C ********  PROSOXH  *********
C  TO PARON YPOPROGRAMMA XRHSIMOPOIEI TO YPOPROGRAMMA
C     NHM(MERA,MHNA,ETOS)
C *****************************
C
      INTEGER ET1,ET2
      NMER(NET)=(NET-1)*365+(NET-1)/4-(NET-1)/100+(NET-1)/400
      N1=NMER(ET1)
      N1=N1+NHM(ME1,MH1,ET1)
      N2=NMER(ET2)
      N2=N2+NHM(ME2,MH2,ET2)
      MER=IABS(N2-N1)
      RETURN
      END
```

Τόσο αὐτή ὅσο καί ἡ προηγούμενη ἄσκηση θά μπορούσαν νά προγραμματισθοῦν σέ δυό σειρές μόνον, ὑπό μορφήν μιᾶς συναρτήσεως ἐντολῆς. Ὡστόσο ὁ δρόμος πού ἀκολουθήσαμε εἶναι πιό φυσιολογικός καί εὐκολονόητος (δές καί σελ. 220 στό {5}). Μερικές τέτοιες συναρτήσεις ἐντολές μπορεῖ νά δῆ ὁ ἐνδιαφερόμενος στό ἄρθρο {14} τοῦ Robertson. Ἕνα σχετικό μέ τά δύο τελευταῖα προβλήματα εἶναι καί τό P17.4, τό ὁποῖο τυπώνει τό ἡμερολόγιο ἑνός οἱουδήποτε ἔτους 1901<ETOS<2099 . Σημείωσε ἀκόμη ὅτι, τόσο σ' αὐτά τά προγράμματα ὅσο καί στό ἀναφερθέν P17.4 , δέν λαμβάνουμε ὑπ' ὄψιν τίς διαφορές Γρηγοριανοῦ - Ἰουλιανοῦ ἡμερολογίου (τοῦτο ἁπλουστεύει τούς ὑπολογισμούς).

P15.4 Μέ τό EXTERNAL χαρακτηρίζουμε μόνο τίς συναρτήσεις πού ὑπεισέρχονται σάν τυπικές μεταβλητές σέ ἄλλες συναρτήσεις ὑποπρογράμματα. Ἐδῶ ἡ F δέν περιέχει τήν SQRT σάν τυπική μεταβλητή.

P15.5 Ἐφάρμοσε τήν P15.1 μέ τήν συνάρτηση ὑποπρόγραμμα

```
REAL FUNCTION F(X)
F=1.
RETURN
END
```

P15.6 Τούτη καί ἡ προηγούμενη ἄσκηση ἀποσκοποῦν, στό νά δώσουν μιά ἰδέα γιά τήν συσσώρευση σφαλμάτων λόγω μεγάλου πλήθους πράξεων. Τέτοια σφάλματα παρουσιάζονται ἐπίσης στά ἀποτελέσματα τῶν P15.1 - P15.3 (δές καί §20).

P15.7 Ἐάν MEGA (ἐδῶ $=2^{31}$) συμβολίζει τήν μεγίστη δύναμη τοῦ 2 πού συγκρατεῖ ὁ ὑπολογιστής, θά πρέπει ἡ μεταβλητή II $\leq$MEGA ἄρα καί γιά τό μέγιστο II πού λαμβάνεται γιά I=M θά πρέπει 2**(M-1)*N$\leq$2**31 ἄρα N$\leq$2**22=4194304 .

```
C  P15.8
      DOUBLE PRECISION FUNCTION ROMBRG(F,ALPHA,BHTA,N,E)
      DOUBLE PRECISION F,ALPHA,BHTA,E,A(10,10),TRAP,F4
      EXTERNAL F
      M=10
      A(1,1) = TRAP(F,ALPHA, BHTA,N)
C  SYMPLHROSH THS PROTHS GRAMMHS ME 0:
      DO 11 I1=2,M
   11 A(1,I1)=0.
C
C  DIADOXIKH KATASKEYH TON YPOLOIPON GRAMMON THS A :
      DO 33 I=2,M
C  TO PROTO STOIXEIO THS EPOMENHS GRAMMHS
      II=2**(I-1)*N
      A(I,1)=TRAP(F,ALPHA,BHTA,II)
C  TA YPOLOIPA STOIXEIA THS EPOMENHS GRAMMHS
             DO 44 J=2,I
      F4=4.D0**(J-1)
   44        A(I,J)=(F4*A(I,J-1)-A(I-1,J-1))/(F4-1.)
C  SYMPLHROSH THS GRAMMHS ME 0
      IF(I.EQ.M) GO TO 66
      I2=I+1
             DO 55 J=I2,M
   55        A(I,J)=0.
C  KRITHRIO DIAKOPHS
  66  IF(DABS(A(I,I)-A(I,I-1)).LT.E) GO TO 77
   33 CONTINUE
      WRITE (6,100)  M
      K=M
      ROMBRG=0.
      GO TO 88
   77 WRITE(6,200) I
      K=I
      ROMBRG=A(K,K)
```

```
   88 DO 888 I8=1,K
  888 WRITE(6,300) (A(I8,J8),J8=1,K)
      RETURN
  100 FORMAT(1H0,5X,'META',I4,' BHMATA O ALGORITHMOS',
     1       ' DEN SYGLINEI')
  200 FORMAT(1H0,5X,'META',I4,' BHMATA PLHROYTAI TO '
     2       ,'E-KRITHRIO')
  300 FORMAT(1H0,10F10.7)
      END

       DOUBLE PRECISION FUNCTION TRAP(F,A,B,N)
      DOUBLE PRECISION A,B,H,S
      H=(B-A)/DFLOAT(N)
      S=0.D0
      N1=N-1
      DO 33 I=1,N1
   33 S=S+F(A+H*FLOAT(I))
      TRAP=H*(0.5D0*(F(A)+F(B))+S)
      RETURN
      END


C   P15.9    O KANONAS TOY SIMPSON
      REAL FUNCTION SIMPS(F,A,B,N)
      H=(B-A)/FLOAT(N)/2.
      S1=F(A+H)
      S2=0.
      N1=N-1
      DO 1 I=1,N1
      S1=S1+F(A+FLOAT(2*I+1)*H)
    1 S2=S2+F(A+FLOAT(2*I)*H)
      SIMPS=(4.*S1+2.*S2+F(A)+F(B))*H/3.
      RETURN
      END


C   P15.10  O KANONAS TON 3/8
      REAL FUNCTION CN38(F,A,B,N)
      H=(B-A)/3./FLOAT(N)
      S1=F(B-2.*H)
      S2=F(B-H)
      S3=0.
      N1=N-1
      DO 1 I=1,N1
      S1=S1+F(A+FLOAT(3*I-2)*H)
      S2=S2+F(A+FLOAT(3*I-1)*H)
    1 S3=S3+F(A+FLOAT(3*I)*H)
      CN38=3./8.*H*(F(A)+F(B)+3.*S1+3.*S2+2.*S3)
      RETURN
      END
```

```
C  P15.11
      DIMENSION  A(10)
      FI(X,N)=0.5*X+1.5/FLOAT(N)
      E=0.001
      M=10
      A(1)=5.
C  SYMPLHROSH THS PROTHS GRAMMHS ME 0:
      DO 11 I1=2,M
   11 A(I1)=0.
      WRITE(6,300) A
C  DIADOXIKH KATASKEYH TON YPOLOIPON GRAMMON THS A :
      DO 33 I=2,M
C  TO PROTO STOIXEIO THS EPOMENHS GRAMMHS
      BOH1=A(1)
      A(1)=FI(A(1),I)
C  TA YPOLOIPA STOIXEIA THS EPOMENHS GRAMMHS
            DO 44 J=2,I
            F4=4.**(J-1)
      BOH2=(F4*A(J-1)-BOH1)/(F4-1.)
      BOH1=A(J)
      A(J)=BOH2
  44  CONTINUE
C  SYMPLHROSH THS GRAMMHS ME 0
      IF(I.EQ.M) GO TO 66
      I2=I+1
            DO 55 J=I2,M
  55  A(J)=0.
      WRITE(6,300) A
C  KRITHRIO DIAKOPHS
   66 IF(ABS(A(I) -A(I-1)).LT.E) GO TO 77
   33 CONTINUE
C  EKTYPOSH
      WRITE (6,100)  M
      STOP
   77 WRITE(6,200) I
      STOP
  100 FORMAT(1H0,5X,'META',I4,' BHMATA O ALGORITHMOS',
     1       ' DEN SYGLINEI')
  200 FORMAT(1H0,5X,'META',I4,' BHMATA PLHROYTAI TO '
     2       ,'E-KRITHRIO')
  300 FORMAT(1H0,10F10.7)
      STOP
      END
```

```
C  P15.12  METABASH APO KYLINDRIKES SE KARTESIANES
C          SYNTETAGMENES
      DIMENSION  X(3),Y(3)
      DATA X/1.,2.,3./
      DO 11 I=1,3
   11 Y(I)=F(X,3,I)
      WRITE(6,100) X
      WRITE(6,100) Y
  100 FORMAT(1H0,2(1H(,2P3E16.7,1H)))
      STOP
      END
```

```
      REAL FUNCTION F(X,N,I)
      DIMENSION X(N)
      IF(I.EQ.1)  F=X(1)*COS(X(2))
      IF(I.EQ.2)   F=X(1)*SIN(X(2))
      IF(I.EQ.3)     F=X(3)
      RETURN
      END

C   P15.13   SYNARTHSH YPOPROGRAMMA EYRISKEI TO OLOKLHROMA
C            THS F ME TH METHODO TOY ROMBERG
C
      REAL FUNCTION RMBRG(F,ALPHA,BHTA,E,N)
      EXTERNAL F
C   PROSOXH MHN PARALIPSEIS TA YPOPROGRAMMATA F,TRAP
      DIMENSION    A(20)
      M=20
      H=(BHTA-ALPHA)/FLOAT(N)
      A(1)=TRAP(F,ALPHA,BHTA,N)
C   DIADOXIKH KATASKEYH 2AS,3HS,...,K.T.L GRAMMHS
      DO 1 I=2,M
C   YPOLOGISMOS TOY NEOY A(1)
      H=H/2.
      S1=F(ALPHA+H)
      N1=N-1
      DO 2 K=1,N1
    2 S1=S1+F(ALPHA+FLOAT(2*K+1)*H)
C   KRATHMA THS PALAIAS TIMHS TOY A(1)
      BOH1=A(1)
C   TO NEO A(1) :
      A(1)=A(1)*0.5+H*S1
C   ETOIMASIA TOY N GIA THN EPOMENH GRAMMH
      N=2*N
C   YPOLOGISMOS TON STOIXEION THS NEAS GRAMMHS
      DO 3 J=2,I
      BOH2=(4.**(J-1)*A(J-1)-BOH1)/(4.**(J-1)-1.)
      IF(J.EQ.I) GO TO 4
      BOH1=A(J)
    4 A(J)=BOH2
    3 CONTINUE
C   TELOS THS KATASKEYHS THS NEAS GRAMMHS
      IF(ABS(A(I)-A(I-1)).GE.E) GO TO 1
      RMBRG=A(I)
      RETURN
    1 CONTINUE
      RMBRG=-1.
      RETURN
      END
```

P16.6 α) Ἀπό μία.

β) Ἡ πρώτη γραμμή περιέχει τό A, ἡ δεύτερη τό B καί ἡ τρίτη τό C.

P16.7 Ἀντικατάστησε τίς ἐντολές WRITE μέ τίς :

```
    WRITE(6,400)
400 FORMAT(6X,1HA,14X,1HB,14X,1HC//)
```

```
      DO 1 I=1,N
    1 WRITE(6,300)  A(I),B(I),C(I)
  300 FORMAT(1H ,3G15.7)
```

P16.8 Στά άντίστοιχα ὑποπρογράμματα ATHROI, SYN ἀντικατάστησε μέ τίς ἐντολές

```
   11 Z(I)=X(I)-Y(I)
```

ἀντ.

```
    1 Z(I1,J1)=X(I1,J1)-Y(I1,J1)
```

```
C  P16.9
      SUBROUTINE  DIAG(A,NA,NS,D)
C  KATASKEYAZEI THN DIAGONIO MHTRA A ME A(I,I)=D
C  NA  = APOLYTES DIASTASEIS (MEGISTES DIASTASEIS KYRIOY PROGRAM.)
C  NS  = SXETIKES DIASTASEIS
      DIMENSION  A(NA,NA)
      DO 1 I=1,NS
      DO 1 J=1,NS
      A(I,J) = 0.
    1 A(I,I) = D
      RETURN
      END
```

```
C  P16.10  POLLAPLASIASMOS MHTRAS EPI DIANYSMA
      DIMENSION A(10,10),X(10),Y(10)
      NA=10
      READ (5,100)M,N
      READ(5,200)((A(I,J),J=1,N),I=1,M)
      READ(5,200)(X(I),I=1,N)
        DO 1  I=1,M
    1     WRITE(6,300)  (A(I,J),J=1,N)
      WRITE(6,99999)
      WRITE(6,300) (X(I),I=1,N)
      WRITE(6,99999)
      CALL EPI2(A,X,Y,NA,N,M)
      WRITE(6,300) (Y(J),J=1,M)
99999 FORMAT(1H0)
  100 FORMAT(2I8)
  200 FORMAT(10F8.0)
  300 FORMAT(1H0,10F8.3)
      STOP
      END

      SUBROUTINE EPI2(A,X,Y,NA,N,M)
      DIMENSION  A(NA,NA),X(N),Y(M)
      DO  1   K=1,M
      S=0.
      DO   2  L=1,N
      S=S+A(K,L)*X(L)
    2 Y(K)=S
    1 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
C   P16.11
      SUBROUTINE TYXH(Y,M,A)
      INTEGER X,Y
      DIMENSION  A(M)
      X=Y
      IF(X.LE.0.OR.X.GT.32768) STOP
      N=2**15
      XN=FLOAT(N)
C   KATASKEYH THS AKOLOYTHIAS
      DO 1 I=1,M
      X=MOD(X*32581,N)
      A(I)=FLOAT(X)/XN
    1 CONTINUE
      RETURN
      END


C   P16.12
      SUBROUTINE TAXH(Y,X,N)
      DIMENSION X(N),Y(N)
      DO 11 I=1,N
   11 X(N)=Y(N)
      N1=N-1
      DO  1  I=1,N1
      M=I+1
            DO 2 J=M,N
            IF (X(I).LE.X(J)) GO TO 2
            H=X(J)
            X(J)=X(I)
            X(I)=H
    2       CONTINUE
    1 CONTINUE
      RETURN
      END


C   P16.13
      REAL FUNCTION XMIN(X,N)
      DIMENSION  X(N)
      XMIN=X(1)
      DO 1 I=2,N
      IF(X(I).LT.XMIN) XMIN=X(I)
    1 CONTINUE
      RETURN
      END
C
C
      SUBROUTINE XMIN(X,N,XMIKRO)
      DIMENSION X(N)
      XMIKRO=X(1)
      DO 1 I=2,N
      IF(X(I).LT.XMIKRO) XMIKRO=X(I)
    1 CONTINUE
      RETURN
      END
```

P16.14 Τό γινόμενο τῶν πολυωνύμων A(x) B(x) εἶναι βαθμοῦ n+m-2 ἔχει λοιπόν n+m-1 συντελεστές $c_1, c_2, \ldots, c_{n+m-1}$, οἱ ὁποῖοι δίδονται ἀπ' τούς τύπους

$$c_{n+m-1}=a_n \cdot b_m$$

$$c_{n+m-2}=a_n \cdot b_{m-1}+a_{n-1} \cdot b_m$$

$$c_{n+m-3}=a_n \cdot b_{m-2}+a_{n-1} \cdot b_{m-1}+a_{n-2} \cdot b_m \qquad \text{καί ἐν γένει}$$

$$c_{n+m-k}= \sum_{\substack{i+j=n+m-k+1 \\ 1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} a_i \cdot b_j \qquad \text{γιά } k=1,2,\ldots,n+m-1 \quad (*)$$

Τό ἑπόμενο πρόγραμμα ὑπολογίζει τούς συντελεστές c_{n+m-k} βάσει τοῦ τύπου (*) . Τό NSMM1 πού δίδεται στό ὑποπρόγραμμα ἔχει τήν τίμη NSMM1=N+M-1 καί εἶναι ἡ διάσταση τοῦ διανύσματος C τό ὁποῖον περιέχει τούς συντελεστές $c_1, c_2, \ldots, c_{n+m-1}$ τοῦ πολυωνύμου-γινόμενον :

$$c_1 x^{n+m-2}+c_2 x^{n+m-3}+\ldots+c_{n+m-1}$$

```
C  P16.14   POLLAPLASIASMOS POLYONYMON
      SUBROUTINE POLPOL(A,B,C,N,M,NSMM1)
      DIMENSION  A(N),B(M), C(NSMM1)
      NSM=NSMM1+1
      NSMS1=NSM+1
      DO  1  K = 1 , NSMM1
        S=0.
        DO  2  I = 1 , N
        DO  2  J = 1 , M
        IF(I+J.NE.NSMS1-K) GO TO 2
        S=S+A(I)*B(J)
    2 CONTINUE
    1 C(NSM-K)=S
      RETURN
      END


C  P16.15
      SUBROUTINE  MAXD(A,NA,NS,AMEGA)
C  YPOLOGIZEI TO MEGISTO KAT' APOLYTO TIMH STOIXEIO
C  THS MHTRAS  A(NS,NS) METAXY TON STOIXEION YPERANO
C  THS DIAGONIOY  DHL.  J.GT.I
      DIMENSION  A(NA,NA)
      AMEGA=ABS(A(1,2))
      NS1=NS-1
      DO 1 I=1,NS1
      I1=I+1
      DO  1  J=I1,NS
        IF(ABS(A(I,J)).GT.AMEGA)  AMEGA=ABS(A(I,J))
    1 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
C   P16.16
      EXTERNAL F
C   DIABASE ARXIKO DIASTHMA (A,B) KAI SFALMA E
      READ(5,100) A,B,E
  100 FORMAT(3F10.4)
      CALL DIXO(A,B,E,F,XM)
      STOP
      END
      SUBROUTINE DIXO(A,B,E,F,XM)
      XA=A
      XD=B
C   XA = ARISTERO AKRO TOY DIASTHMATOS
C   XD = DEXIO AKRO  TOY DIASTHMATOS
C   XM = MESO TOY DIASTHMATOS
C   DIXOTOMHSH DIASTHMATOS
    1 XM=(XA+XD)*0.5
      Y=F(XM)
      WRITE(6,300)  XA,XD,Y
 300  FORMAT(1H0,3HXA=,G15.7,5H, XD=,G15.7,4X,6HF(XM)=,G15.7)
      IF(XD-XA.LT.E) RETURN
      IF(F(XM)*F(XA).GT.0.) XA=XM
      IF(F(XM)*F(XA).LT.0.) XD=XM
      IF(F(XM).EQ.0.) RETURN
      GO TO 1
      END
      REAL FUNCTION F(X)
      F=X-COS(X)
      RETURN
      END
```

```
C   P17.5  XARTI ALLHLOGRAFIAS
      DIMENSION NTEXT(4,20)
      DO 1 I=1,4
    1 READ(5,100) (NTEXT(I,J),J=1,20)
      READ(5,200)  NPOSO
 100  FORMAT(20A4)
 200  FORMAT(I10)
      DO 2 I=1,NPOSO
        WRITE(6,300)
 300  FORMAT(1H1//////)
        DO 3 K1 =1,4
    3   WRITE(6,400) (NTEXT(K1,K2),K2=1,20)
    2 CONTINUE
 400  FORMAT(1H0 , 20A4)
      STOP
      END
```

```
C   P17.8
      READ(5,100) NFORM
  100 FORMAT(1A4)
      READ(5,NFORM) I
      WRITE(6,NFORM) I
      STOP
      END
```

Τό προηγούμενο πρόγραμμα εἶναι λανθασμένο ὅταν τό NFORM περιέχει τό κείμενο (I4) . Στό μεταβλητό FORMAT πρέπει πάντα ἡ μεταβλητή (ἐδῶ NFORM) πού περιέχει τούς κώδικες τοῦ FORMAT νά εἶναι διάνυσμα, ἔστω καί μιᾶς διαστάσεως. Τό πρόγραμμα διορθώνεται ἄν προσθέσωμε στήν ἀρχή του τήν ἐντολή

DIMENSION NFORM(1)

```
C  P17.9
      DIMENSION NTEXT(20)
      INDEX =1
  1   READ(5,100) NTEXT
100   FORMAT(1I4,19A4)
      IF(NTEXT(1).EQ.INDEX)  WRITE(6,200) (NTEXT(I),I=2,20)
200   FORMAT(4X,19A4)
      IF(NTEXT(1).LE.0) STOP
      GO TO 1
      END


C  P17.10
      REAL ARITH(10)
      INTEGER  DIABAS(15), GRAPSE(15)
   1  READ(5,100) N
 100  FORMAT( I10 )
      IF  (N.LE.0)  STOP
      READ(5,200)  DIABAS
      READ(5,200)  GRAPSE
 200  FORMAT(20A4)
      DO 2 I=1,N
         READ(5,DIABAS) ARITH
   2     WRITE(6,GRAPSE) ARITH
      GO TO 1
      END


C  P17.11
      SUBROUTINE SXHMA(X,Y,N)
      REAL KENO
      DIMENSION X(N),Y(N)
      DIMENSION TYPOS(100)
      DATA   TYPOS / 100*1H / , KENO /1H /, ASTERI /1H*/
C  YPOLOGISE TO MIN KAI TO MAX TON Y(1),...,Y(200).
      YMAX=Y(1)
      YMIN=Y(1)
      DO 44 I=1,N
      IF(Y(I).GT.YMAX) YMAX=Y(I)
      IF(Y(I).LT.YMIN) YMIN=Y(I)
   44 CONTINUE
C  KATANOMH TOY (YMIN,YMAX) SE 100 AKERAIES TIMES
C  KAI EKTYPOSH
      SYNT=99./(YMAX-YMIN)
      DO 55 I=1,N
      K = INT(SYNT*(Y(I)-YMIN)+1.5)
C  BALE STHN THESH K TOY DIANYSMATOS TYPOS ENA     *
      TYPOS(K)=ASTERI
      WRITE(6,100) X(I),Y(I),TYPOS
      TYPOS(K)=KENO
   55 CONTINUE
```

```
  100 FORMAT(1H ,2HX=,F7.2,3H Y=,F8.3,1X,100A1)
      RETURN
      END


C   P17.12  EKTYPOSH GRAFIKHS PARASTASEOS
      REAL KENO MHDEN
      DIMENSION   TYPOS(101),X(200),Y1(200)
      DATA TYPOS /101*1H /,ASTERI/1H*/,KENO/1H /
      DATA   MHDEN/1H0/
      F1(Z)=SIN(Z)
      A=-2.
      H=0.05
      DO  11  I=1,200
      X(I)=FLOAT(I)*H+A
      Y1(I)=F1(X(I))
   11 CONTINUE
C   YPOLOGISE TO MIN KAI TO MAX TON Y1
      YMAX=Y1(1)
      YMIN=Y1(1)
      DO  22  J=1,200
      IF(Y1(J).GT.YMAX)  YMAX=Y1(J)
      IF(Y1(J).LT.YMIN)  YMIN=Y1(J)
   22 CONTINUE
C   EKTYPOSH THS GRAFIKHS PARASTASEOS
      SYNT=100./(YMAX-YMIN)
      K1=INT(SYNT*(-YMIN)+1.5)
      IF(YMAX*YMIN.LE.0.) TYPOS(K1)=MHDEN
      DO 44 I=1,200
      K2=INT(SYNT*(Y1(I)-YMIN)+1.5)
      PROSOR=TYPOS(K2)
      TYPOS(K2)=ASTERI
      WRITE(6,100) X(I),Y1(I) ,TYPOS
      TYPOS(K2)=PROSOR
   44 CONTINUE
  100 FORMAT(1H ,2(F7.3,1X),101A1)
      STOP
      END


C   P17.13  TAYTOXRONH XARAXH DYO GRAFIKON PARASTASEON
C
      REAL KENO
      DIMENSION   TYPOS(101),X(200),Y1(200),Y2(200)
      DATA  TYPOS/101*1H /,KENO/1H /,ASTERI/1H*/,TAF,SYN/1HT,1H+/
      F1(Z)=SIN(Z)
      F2(Z)=EXP(-Z)*SIN(Z)*0.5
      A=-2.
      H=0.05
      DO  11  I=1,200
      X(I)=FLOAT(I)*H+A
      Y1(I)=F1(X(I))
      Y2(I)=F2(X(I))
   11 CONTINUE
C
```

```
C  YPOLOGISE TO MIN KAI TO MAX TON Y1,Y2
      YMAX=Y1(1)
      YMIN=Y1(1)
      DO  22  J=1,200
      IF(Y1(J).GT.YMAX)  YMAX=Y1(J)
      IF(Y2(J).GT.YMAX)  YMAX=Y2(J)
      IF(Y1(J).LT.YMIN)  YMIN=Y1(J)
      IF(Y2(J).LT.YMIN)  YMIN=Y2(J)
   22 CONTINUE
C
C  EKTYPOSH THS GRAFIKHS PARASTASEOS
      SYNT=100./(YMAX-YMIN)
      DO 44 I=1,200
      K1=INT(SYNT*(Y1(I)-YMIN)+1.5)
      K2=INT(SYNT*(Y2(I)-YMIN)+1.5)
      TYPOS(K1)=ASTERI
      TYPOS(K2)=SYN
      IF(K1.EQ.K2)  TYPOS(K1)=TAF
      WRITE(6,100) X(I),Y1(I),Y2(I),TYPOS
      TYPOS(K1)=KENO
      TYPOS(K2)=KENO
   44 CONTINUE
  100 FORMAT(1H ,3(F7.3,1X),101A1)
      STOP
      END
```

P17.14 Πρόσθεσε στό P17.4 τίς έντολές :
πρίν τό WRITE(6,1000) :

```
      WRITE(6,3000)  ETOS,ETOS,ETOS
 3000 FORMAT(1H1,10X,3(12X,I4,24X))
```

καί άντικατάστησε τό 1000 FORMAT μέ τό

```
 1000 FORMAT(1H ,10X,3(10X,3A4,18X))
```

P17.15 Στό P17.14 άντί τῆς DATA ETOS /1981/ πρόσθεσε μετά τίς έντολές DATA τίς :

```
      READ(5,100) NETOS1,NETOS2
  100 FORMAT(2I10)
      DO 1 ETOS=NETOS1,NETOS2
```

καί τήν έντολή :

```
    1 CONTINUE
```

πρίν τό END τοῦ κυρίου προγράμματος.

```
C  P18.8
      SUBROUTINE RUNKUT(XA,YA,NA,H,FI)
      REAL  K,K1,K2,K3,K4
C  YPOLOGIZEI ME THN KLASSIKH METHODO RUNGE-KUTTA
C  THN PROSEGGISTIKH LYSH TOY P.A.T.
C           YTONOS=FI(X,Y) ME ARXIKES TIMES
C                 (XA(1),YA(1))
C  DIDONTAI = XA(1),YA(1),NA,H,FI
C             NA= PLHTHOS SHMEION
C             H = BHMA AYXHSEOS TOY XA
      DIMENSION   XA(NA),YA(NA)
```

```
      DO 11 I=2,NA
      XA(I)=XA(1)+FLOAT(I-1)*H
      X=XA(I-1)
      Y=YA(I-1)
      K1=H*FI(X,Y)
      K2=H*FI(X+H*0.5,Y+K1*0.5)
      K3=H*FI(X+H*0.5,Y+K2*0.5)
      K4=H*FI(X+H,Y+K3)
      K=1./6.*(K1+2.*K2+2.*K3+K4)
      YA(I)=Y+K
   11 CONTINUE
      RETURN
       END


C  P18.9
      SUBROUTINE RNKT(XA,YA,NA,H,SYNART,M)
C  YPOLOGIZEI ME THN GENIKEYMENH METHODO RUNGE-KUTTA
C              M - TAXEOS
C  THN PROSEGGISTIKH LYSH TOY P.A.T.
C           YTONOS=SYNART(X,Y) ME ARXIKES TIMES
C                 (XA(1),YA(1))
C  DIDONTAI = XA(1),YA(1),NA,H,SYNART
C              NA= PLHTHOS SHMEION
C              H = BHMA AYXHSEOS TOY XA
      REAL K(10)
      DIMENSION   A(10), B(10), C(10,10)
      DIMENSION   XA(NA),YA(NA)
      COMMON  A, B, C
      DO 11 I=2,NA
      XA(I)=XA(1)+FLOAT(I-1)*H
      X=XA(I-1)
      Y=YA(I-1)
      K(1)=H*SYNART(X,Y)
C  OTAN M=1 TOTE DEN ORIZONTAI TA K(2),K(3),...
      IF(M.EQ.1) GO TO 222
C
C  YPOLOGISMOS TOY EPOMENOY Y BASEI TON K(1),K(2),...
C  KAI TOY A(1),A(2),....
      DO  111  J=2,M
C  YPOLOGISMOS TON K(2),K(3),... ME TON 111-DO-KYKLO
         S=Y
         J1=J-1
         DO   333  JJ=1,J1
  333       S=S+C(J,JJ)*K(JJ)
         Q=X+B(J)*H
         K(J)=H*SYNART(Q,S)
  111 CONTINUE
  222 S=Y
      DO  444  L=1,M
  444 S=S+A(L)*K(L)
      YA(I)=S
   11 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
C   P18.11
      SUBROUTINE TESTL(X,Y,N,Z1,Z2,M,H,F)
      REAL   LGRNGE
      DIMENSION  Z1(M),Z2(M),X(N),Y(N)
      DO 1 I=1,N
  1   Y(I)=F(X(I))
      DO 2 I2=1,M
      Z=X(1)+FLOAT(I2-1)*H
      Z1(I2)=F(Z)
      Z2(I2)=LGRNGE(X,Y,N,Z)
  2    CONTINUE
      RETURN
      END

C   P18.12  PARAGOGHSH SYNARTHSEOS ME TON KANONA TOY ROMBERG
      DIMENSION A(10,10)
      COMMON /PARRO/A
      EXTERNAL   F
      X=3.141529/3.
      H=0.1
      E=0.00001
      CALL PRRMB(F,X,H,E)
      STOP
      END

      REAL FUNCTION F(X)
       F=SIN(X)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE PRRMB(F,X,H,E)
      DIMENSION A(10,10)
      COMMON /PARRO/ A
      M=10
      A(1,1)=(F(X+H)-F(X-H))/2./H
C   SYMPLHROSH THS PROTHS GRAMMHS ME 0:
      DO 11 I1=2,M
   11 A(1,I1)=0.
C   DIADOXIKH KATASKEYH TON YPOLOIPON GRAMMON THS A :
      DO 33 I=2,M
C   TO PROTO STOIXEIO THS EPOMENHS GRAMMHS
      H=H/2.
      A(I,1)=(F(X+H)-F(X-H))/2./H
C   TA YPOLOIPA STOIXEIA THS EPOMENHS GRAMMHS
           DO 44 J=2,I
       F4=4.**(J-1)
   44      A(I,J)=(F4*A(I,J-1)-A(I-1,J-1))/(F4-1.)
C   SYMPLHROSH THS GRAMMHS ME 0
      IF(I.EQ.M) GO TO 66
      I2=I+1
           DO 55 J=I2,M
   55      A(I,J)=0.
C   KRITHRIO DIAKOPHS
 66   IF( ABS(A(I,I)-A(I,I-1)).LT.E) GO TO 77
   33 CONTINUE
```

```
      WRITE (6,100)  M
      K=M
      GO TO 88
   77 WRITE(6,200) I
      K=I
   88 DO 888 I8=1,K
  888 WRITE(6,300) (A(I8,J8),J8=1,K)
      RETURN
  100 FORMAT(1H0,5X,'META',I4,' ΒHMATA O ALGORITHMOS',
     1        ' DEN SYGLINEI')
  200 FORMAT(1H0,5X,'META',I4,' BHMATA PLHROYTAI TO '
     2        ,'E-KRITHRIO')
  300 FORMAT(1H0,10F10.7)
      END


C   P18.13  EYRESH ANTISTROFOY ME EPANALHPTIKH METHODO
      DIMENSION A(3,3),B(3,3),X(3,3),Y(3,3)
      DATA NA,NS,NBHM/ 3,3,25/
      DATA A/1.,0.,0.,1.,1.,0.,1.,1.,1./
      DATA B/1.,0.,0.,-1.,0.999,0.,0.,-0.95,1.1/
      CALL ANTIST(A,B,X,Y,NA,NS,NBHM)
      STOP
      END

      SUBROUTINE ANTIST (A,B,X,Y,NA,NS,NBHM)
C   KATASKEYAZEI KAI TYPONEI TIS AKOLOYTHIES MHTRON  X, Y
      DIMENSION A(NA,NA),B(NA,NA),X(NA,NA),Y(NA,NA)
       DO  1 I=1,NBHM
      IF(I.NE.1) CALL POLX(X,Y,B,NA,NS)
      CALL COPY(X,B,NA,NS)
      CALL EPI (A,X,Y,NA,NS)
      CALL TYPOSE(X,Y,NA,NS)
    1 CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE COPY (A1,A2,NAP,NSX)
C   ANTIGRAFEI THN A2  STHN A1
      DIMENSION A1(NAP,NAP),A2(NAP,NAP)
      DO 1 I=1,NSX
      DO 1 J=1,NSX
    1 A1(I,J)=A2(I,J)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE EPI(A1,A2,A3,NAP,NSX)
C   POLLAPLASIAZEI    A3=A1*A2
      DIMENSION A1(NAP,NAP),A2(NAP,NAP),A3(NAP,NAP)
      DO 1 I=1,NSX
      DO 1 J=1,NSX
       S=0.
       DO 2 L=1,NSX
    2    S=S+A1(I,L)*A2(L,J)
    1 A3(I,J)=S
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE POLX(X,Y,B,NA,NS)
C  DOTHENDON TON MHTRON X, Y  KATASKEYAZEI THN MHTRA
C        B= 2*X-X*Y
      DIMENSION X(NA,NA),Y(NA,NA),B(NA,NA)
      DO 1 I=1,NS
      DO 1 J=1,NS
       S=2.*X(I,J)
       DO 2 L=1,NS
 2      S=S-X(I,L)*Y(L,J)
  1    B(I,J)=S
      RETURN
      END

      SUBROUTINE TYPOSE(A1,A2,NA,NS)
C  TYPONEI TIS MHTRES A1, A2 TH MIA DIPLA STHN ALLH
      DIMENSION A1(NA,NA),A2(NA,NA)
      DO 1 L=1,NS
  1   WRITE(6,200) (A1(L,M),M=1,NS),(A2(L,M),M=1,NS)
 200  FORMAT( 5X,7F8.3,5X,7F8.3)
      WRITE(6,222)
 222  FORMAT(1H0)
      RETURN
       END
```

P19.6 Μέ τήν έντολή :

B(LAMDA,M2)=-B(LAMDA,M2)/BOH

άλλάζουν τά στοιχεῖα τῆς LAMDA γραμμῆς (δές (6),σελ.171).
Μέ τήν έντολή :

B(M2,KAPA)=B(M2,KAPA)/BOH

άλλάζουν τά στοιχεῖα τῆς KAPA-στήλης.

P19.7 Κατασκεύασε πρόγραμμα πού χρησιμοποιεῖ τίς ὑπορουτίνες ANTIST τοῦ P19.1 καί EPI2 τοῦ P16.10

P19.8 Ἐάν $\vec{X}_1,\ldots,\vec{X}_N$ εἶναι οἱ λύσεις τῶν N-τό πλῆθος συστημάτων :

$$A\cdot\vec{X} = \vec{E}_i \ , \ i=1,2,\ldots,N$$

ὅπου $\vec{E}^{\tau} = (0,0,\ldots,1,\ldots,0)$ (1 στήν i-στή θέση), τότε ἡ μήτρα B τῆς ὁποίας οἱ στῆλες δίδονται ἀπό τά $\vec{X}_1,\ldots,\vec{X}_N$ εἶναι ἡ ἀντίστροφος τῆς A.

P19.10 Χρησιμοποίησε τό P19.2 παίρνοντας σάν μήτρα A τήν

$A(I,J)= x_i^{N-j}$ καί $B(I)= y_i$.

```
C  P19.12  LYSH GRAMMIKOY SYSTHMATOS
     DIMENSION   A(10,10),B(10),ATONOS(10,10),BTONOS(10),X(10)
     DIMENSION SXOLIO(20)
     NA=10
C  TO DOTHEN SYSTHMA
     READ(5,9)  SXOLIO
     WRITE(6,9)  SXOLIO
     READ(5,100) N
     DO 1 I1=1,N
   1 READ(5,200) (A(I1,J1),J1=1,N)
```

```
      DO 2 I2=1,N
    2 WRITE(6,300)  (A(I2,J2),J2=1,N)
      WRITE(6,99999)
      READ(5,200) (B(I),I=1,N)
      WRITE(6,300) (B(I),I=1,N)
      CALL GAUSS(A,B,ATONOS,BTONOS,DET,N,NA,X)
C   ISODYNAMO TRIGONIKO
      READ(5,9)  SXOLIO
      WRITE(6,9)  SXOLIO
      DO 3 I3=1,N
    3 WRITE(6,300) (ATONOS(I3,J3),J3=1,N)
      WRITE(6,99999)
      WRITE (6,300) (BTONOS(I),I=1,N)
C   H ORIZOYSA TOY SYSTHMATOS
      READ(5,9)  SXOLIO
      WRITE(6,9)  SXOLIO
      WRITE(6,300)  DET
      IF(DET.EQ.O.) STOP
C   H LYSH TOY SYSTHMATOS
      READ(5,9)  SXOLIO
      WRITE(6,9)  SXOLIO
      WRITE(6,300) (X(I),I=1,N)
    9 FORMAT(20A4)
  100 FORMAT(I4)
  200 FORMAT(10F8.0)
  300 FORMAT(1H0,2X,10G13.5)
99999 FORMAT(1H0)
      STOP
      END
      SUBROUTINE GAUSS(AA,BB,A,B,DET,N,NA,X)
C   ANAGEI SYSTHMA GRAMMIKON EXISOSEON SE ISODYNAMO TRIGONIKO
C   KAI TO EPILYNEI ME TH METHODO TOY GAUSS
C   NA       =  MEGISTH DIASTASH MHTRON TOY KYRIOY PROGRAMMATOS
C   N        =  DIASTASH DIDOMENHS MHTRAS
C   DEDOMENA  =  AA(N,N),BB(N) = ARXIKO SYSTHMA
C   ZHTOYMENA =  A(N,N),B(N)   = TRIGONIKO ISODYNAMO SYSTHMA
C   NPLIN     =  GINOMENO TON PROSHMON POY PROKYPTOYN LOGO
C               ENALLAGHS TON GRAMMON TOY ARXIKOY SYSTHMATOS
      DIMENSION  AA(NA,NA),BB(N), A(NA,NA),B(N)
      DIMENSION  X(N)
C   ARXIKES TIMES
      DO  63  IK=1,N
         DO  62  JK=1,N
   62       A(IK,JK)=AA(IK,JK)
   63    B(IK)=BB(IK)
      NPLIN=1
C   EKTELESH TON N-1 BHMATON
C   GIA THN ANAGOGH SE ISODYNAMO TRIGONIKO
      N1=N-1
      DO  1  I = 1 , N1
C   STO I-BHMA BRES PROTA PIO STOIXEIO THS I-STHLHS
C   EINAI MEGISTO KAT APOLYTO TIMH, EXETAZOME MONO
C   TIS I TELEYTAIES GRAMMES:
         M=I
```

```
          I1=I+1
          DO  3  K= I1,N
             IF(ABS(A(K,I)).LE.ABS(A(M,I))) GO TO 3
             M=K
    3     CONTINUE
C   AFOY BRHKAME TO MEGISTO TON I TELEYTAION STOIXEION
C   THS  I KOLONAS STHN M THESH , ENALLASOME THN I ME THN M GRAMMH
C   EFOSON  M.NE.I
          IF(A(M,I).NE.0.) GO TO 2
          NPLIN=0
       GO TO 1
    2     CONTINUE
          IF(I.EQ.M) GO TO 6
          DO 4 I2=I,N
             F=A(I,I2)
             A(I,I2)=A(M,I2)
    4        A(M,I2)=F
          F=B(I)
          B(I)=B(M)
          B(M)=F
          NPLIN=-NPLIN
    6     CONTINUE
C   METASXHMATISMOS TOY SYSTHMATOS MESO GRAMMIKON
C   SYNDYASMON TON SEIRON.
          DO  5  I3=I1,N
             B(I3)=B(I3)-A(I3,I)/A(I,I)*B(I)
             DO 8 I4=I1,N
                A(I3,I4)=A(I3,I4)-A(I,I4)*A(I3,I)/A(I,I)
    8        CONTINUE
    5     CONTINUE
          DO 7 I3=I1,N
    7        A(I3,I)=0.
    1  CONTINUE
C   EYRESH THS ORIZOYSAS
       S=1.
       DO 111 I=1,N
  111  S=S*A(I,I)
         DET=S*FLOAT(NPLIN)
       IF(DET.EQ.0.) WRITE(6,400)
 400   FORMAT(1H0 ,'****  ORIZOYSA TOY SYSTHMATOS = 0   ****')
       IF(DET.EQ.0.) RETURN
C   LYSH SYSTHMATOS OTAN DET .NE. 0
       X(N)=B(N)/A(N,N)
       N1=N-1
       DO 11 I=1,N1
       NI=N-I
       S=B(NI)
       NI1=NI+1
       DO 22 J=NI1,N
   22  S=S-A(NI,J)*X(J)
   11  X(NI)=S/A(NI,NI)
       RETURN
       END
```

```
      C   P19.13
            SUBROUTINE STROFH(U,NA,N,K,L,FI)
            DIMENSION U(NA,NA)
            DO 1 I=1,N
            DO 1 J=1,N
            A(I,J)=0.
        1   A(I,I)=1.
            A(K,K)=COS(FI)
            A(K,L)=-SIN(FI)
            A(L,L)=A(K,K)
            A(L,K)=-A(K,L)
            RETURN
            END


C   P19.14  PROSDIORISMOS TON IDIOTIMON KAI TON IDIODIANYSMATON
C           MIAS SYMMETRIKHS MHTRAS ME THN METHODO TOY JACOBI
C           MHTRES TO POLY 10 EPI 10 DIASTASEON
      DIMENSION   A(10,10),B(10,10)
      NA=10
C   DIABASE TA N, E KAI TH MHTRA A(N,N)
      READ(5,100)  N,E
      DO 11 I=1,N
   11 READ(5,200)  (A(I,J),J=1,N)
C   KAT  ARXHN B=I
      DO 2 I2=1,N
      DO 2 J2=1,N
      B(I2,J2)=0.
      IF(I2.EQ.J2) B(I2,J2)=1.
    2 CONTINUE
      WRITE(6,400)
C   TYPOSE TIS ARXIKES  A, B
      DO 22 I=1,N
   22  WRITE(6,300) (A(I,J),J=1,N),(B(I,J),J=1,N)
C   EKTELESE 10 TO POLY EPANALIPTIKA BHMATA:
      DO 1 NEPAN= 1,10
C   YPOLOGISE TON EPOMENO ORO THS AKOLOYTHIAS MHTRON
      CALL JACOB2(A,N,B,E,MARKA,NA)
C   EXETASE AN PLHROYTAI TO E KRITHRIO
      IF (MARKA.EQ.1) STOP
C   TYPOSE TIS MHTRES  A, B
      WRITE(6,99999) NEPAN
      DO 33 I=1,N
   33  WRITE(6,300) (A(I,J),J=1,N),(B(I,J),J=1,N)
    1 CONTINUE
  100 FORMAT(1I4,1E16.8)
  200 FORMAT(10F8.4)
  300 FORMAT(1H0,2(3X,4G13.5))
  400 FORMAT(4H0    ,20H  H DIDOMENH MHTRA =    )
99999 FORMAT(1H0,/4X,I2,32H-OS OROS THS AKOLOYTHIAS MHTRON    )
      STOP
      END
      SUBROUTINE JACOB2(A,N,B,E,MARKA,NA)
C   NA      =  MEGISTH DIASTASH MHTRON TOY KYRIOY PROGRAMMATOS
C   N       =  DIASTASH DIDOMENHS MHTRAS
C   E       =  KRITHRIO DIAKOPHS KATASKEYHS AKOLOYTHIAS
```

```
C   H SUBROUTINE AYTH KATASKEYAZEI TON EPOMENO ORO THS AKOLOY-
C   THIAS MHTRON BASEI TOY DOTHENTOS PROHGOYMENOY A.
C   O EPOMENOS OROS SYMBOLIZETAI PALI ME A
C   EPISHS KATASKEYAZETAI H MHTRA B THS OPOIAS OI STHLES
C   SYGLINOYN PROS TA IDIODIANYSMATA THS A (ARXIKOS DOTHEISHS)
C   H MARKA =0 OTAN H PALAIA A DEN PLHROI TO E-KRITHRIO.
      DIMENSION A(NA,NA)
      DIMENSION B(NA,NA)
C   EYRESH TOY MEGISTOY KAT APOLYTON TIMHN  A(L,K), ME L.LT.K
      MARKA=0
      L=1
      K=2
      H=ABS(A(1,2))
      N1=N-1
      DO  1  I=1,N1
      I1=I+1
            DO  2  J=I1,N
            IF(ABS(A(I,J)).LE.H) GO TO 2
            H=ABS(A(I,J))
            L=I
            K=J
    2       CONTINUE
    1 CONTINUE
C
C   H=A(L,K) EINAI TO MEGISTO POY ZHTAME, AKOLOYTHEI H KATA
C   SKEYH TON C=COS(FI),S=SIN(FI).  PROHGOYMENOS ROTAME AN
C   PLHROYTAI TO E-KRITHRIO.
      IF(H*N.LT.E) GO TO 8
C
      TH=(A(K,K)-A(L,L))/2./A(L,K)
       T=1.
       IF(TH.NE.0.)  T=1./(TH+SIGN(SQRT(TH*TH+1.),TH))
      C=1./SQRT(1.+T*T)
      S=C*T
C   AKOLOYTHEI O YPOLOGISMOS THS NEAS MHTRAS A ME THN
C   BOHTHEIA TON C, S
C
C   ALLAGH TON STOIXEION STA SHMEIA DIASTABROSEOS TON L,K
C   GRAMMON KAI STHLON.
      H=C*C*A(L,L)-2.*C*S*A(L,K)+S*S*A(K,K)
      G=S*S*A(L,L)+2.*C*S*A(L,K)+C*C*A(K,K)
      A(K,L)=0.
      A(L,K)=0.
      A(L,L)=H
      A(K,K)=G
C
C   ALLAGH TON STOIXEION STA YPOLOIPA SHMEIA TON L KAI K
C   GRAMMON KAI STHLON.
      DO 3 J3=1,N
      IF(J3.EQ.L.OR.J3.EQ.K) GO TO 3
      H=C*A(J3,L)-S*A(J3,K)
      A(J3,K)=S*A(J3,L)+C*A(J3,K)
      A(J3,L)=H
      A(K,J3)=A(J3,K)
      A(L,J3)=A(J3,L)
    3 CONTINUE
```

```
C
C   TA YPOLOIPA STOIXEIA PARAMENOYN ANALOIOTA
C
C   ALLAGH THS B STIS L,K-STHLES
      DO 4 J4=1,N
      H=B(J4,L)*C+B(J4,K)*S
      B(J4,K)=-B(J4,L)*S+B(J4,K)*C
    4 B(J4,L)=H
      RETURN
    8 MARKA=1
      RETURN
      END
```

Π Ι Ν Α Κ Α Σ 1

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΤΗΣ FORTRAN

Όνομα τῆς συναρτήσεως	Ὁρισμός συναρτήσεως	Όνομα FORTRAN	Τύπος τῆς : ἀνεξ. μετ.	ἐξηρτ. μετ.
φυσικός λογάριθμος	$y=\ln(x)$	ALOG(X)	REAL	REAL
		DLOG(X)	DOUBLE PR.	DOUBLE PR.
		CLOG(X)	COMPLEX	COMPLEX
δεκαδικός λογάριθμος	$y=\log(x)$	ALOG10(X)	REAL	REAL
		DLOG10(X)	DOUBLE PR.	DOUBLE PR.
ἐκθετική συνάρτηση	$y=\exp(x)$	EXP(X)	REAL	REAL
		DEXP(X)	DOUBLE PR.	DOUBLE PR.
		CEXP(X)	COMPLEX	COMPLEX
τετραγωνική ρίζα	$y=\sqrt{x}$	SQRT(X)	REAL	REAL
		DSQRT(X)	DOUBLE PR.	DOUBLE PR.
		CSQRT(X)	COMPLEX	COMPLEX
ἡμίτονο	$y=\sin(x)$	SIN(X)	REAL	REAL
		DSIN(X)	DOUBLE PR.	DOUBLE PR.
		CSIN(X)	COMPLEX	COMPLEX
συνημίτονο	$y=\cos(x)$	COS(X)	REAL	REAL
		DCOS(X)	DOUBLE PR.	DOUBLE PR.
		CCOS(X)	COMPLEX	COMPLEX
ἐφαπτομένη	$y=\tan(x)$	TAN(X)	REAL	REAL
		DTAN(X)	DOUBLE PR.	DOUBLE PR.
συνεφαπτομένη	$y=\mathrm{cotan}(x)$	COTAN(X)	REAL	REAL
		DCOTAN(X)	DOUBLE PR.	DOUBLE PR.
τόξο ἡμιτόνου	$y=\mathrm{arsin}(x)$	ARSIN(X)	REAL	REAL
		DARSIN(X)	DOUBLE PR.	DOUBLE PR.
τόξο συνημιτόνου	$y=\mathrm{arcos}(x)$	ARCOS(X)	REAL	REAL
		DARCOS(X)	DOUBLE PR.	DOUBLE PR.
τόξο ἐφαπτομένης	$y=\mathrm{artan}(x)$	ATAN(X)	REAL	REAL
		DATAN(X)	DOUBLE PR.	DOUBLE PR.
ὑπερβολικό ἡμίτονο	$y=\sinh(x)$	SINH(X)	REAL	REAL
		DSINH(X)	DOUBLE PR.	DOUBLE PR.
ὑπερβολικό συνημίτονο	$y=\cosh(x)$	COSH(X)	REAL	REAL
		DCOSH(X)	DOUBLE PR.	DOUBLE PR.
ὑπερβολική ἐφαπτομένη	$y=\tanh(x)$	TANH(X)	REAL	REAL
		DTANH(X)	DOUBLE PR.	DOUBLE PR.
ἀπόλυτος τιμή	$y=\|x\|$	ABS(X)	REAL	REAL
		DABS(X)	DOUBLE PR.	DOUBLE PR.
		IABS(X)	INTEGER	INTEGER
		CABS(X)	COMPLEX	COMPLEX
μέγιστο n-ἀριθμῶν	$y=\max(x_1,x_2,\ldots,x_n)$	MAX0(X1..XN)	INTEGER	INTEGER
		AMAX0(X1...)	INTEGER	REAL
		AMAX1(X1...)	REAL	REAL
		DMAX1(X1...)	DOUBLE PR.	DOUBLE PR.
ἐλάχιστο n-ἀριθμῶν	$y=\min(x_1,x_2,\ldots,x_n)$	MIN (X1..XN)	INTEGER	INTEGER
		AMIN (X1...)	INTEGER	REAL
		AMIN1(X1...)	REAL	REAL
		DMIN1(X1...)	DOUBLE PR.	DOUBLE PR.
ἀποκοπή δεκαδικῶν ψηφίων		AINT(X)	REAL	REAL
		DINT(X)	DOUBLE PR.	DOUBLE PR.
		INT(X)	REAL	INTEGER
		IDINT(X)	DOUBLE PR.	INTEGER

Όνομα τῆς συναρτήσεως	Ὁρισμός συναρτήσεως	Όνομα FORTRAN	Τύπος τῆς : ἀνεξ. μετ.	ἐξηρτ. μετ.
ὑπόλοιπο διαιρέσεως	y=X1-(ἀποκοπή δεκαδικῶν τοῦ X1/X2)× ×X2	MOD(X1,X2) AMOD(X1,X2) DMOD(X1,X2)	INTEGER REAL DOUBLE PR.	INTEGER REAL DOUBLE PR.
μετατροπή ἀπό ἀκέραιο σέ πραγματικό		FLOAT(X) DFLOAT(X)	INTEGER INTEGER	REAL DOUBLE PR.
μετατροπή πραγματικοῦ σέ ἀκέραιο δι' ἀποκοπῆς τῶν δεκαδικῶν του ψηφίων		IFIX(X)	REAL	INTEGER
μεταφορά προσήμου	y=|X1|×πρόσημο τοῦ X2	ISIGN(X1,X2) SIGN(X1,X2) DSIGN(X1,X2)	INTEGER REAL DOUBLE PR.	INTEGER REAL DOUBLE PR.
πραγματικό μέρος μηγαδικοῦ		REAL(X)	COMPLEX	REAL
φανταστικό μέρος μιγαδικοῦ		AIMAG(X)	COMPLEX	REAL
συζηγής μιγαδικοῦ	y=z	CONJG(Z)	COMPLEX	COMPLEX
μιγαδικός (X1,X2)	y=X1+iX2	CMPLX(X1,X2)	REAL	COMPLEX
μετατροπή REAL σέ DOUBLE PRECISION		DBLE(X)	REAL	DOUBLE PR.

Π Ι Ν Α Κ Α Σ 2

Σειρά τοποθετήσεως ἐντολῶν

1ον) Καθορισμός τύπου ἑνότητος (SUBROUTINE,FUNCTION,...)

2ον) Ἀναλυτικός καθορισμός μεταβλητῶν (REAL,INTEGER,...)

3ον) DIMENSION

4ον) COMMON

5ον) EQUIVALENCE

6ον) DATA

7ον) Συναρτήσεις ἐντολές

8ον) EXTERNAL

9ον) Ὅλες οἱ ἄλλες ἐντολές

10ον) END

Β Ι Β Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α

{1} American National Standard FORTRAN (ANS X3.9-1966) American National Standards Institute, New York 1966.

{2} Heising W., History and Symmary of Fortran Standardization development for the ASA,Comm. ACM 7(1964),590-625.

{3} Clarification of Fortran standards - initial progress, Comm. ACM 12(1969),282-294.

{4} Clarification of Fortran standards - second report, Comm. ACM 14(1971),628-642.

{5} Organick - Meissner, Fortran IV, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 2nd Edition 1974.

{6} Conte S.D., De Boor C., Elementary Numerical Analysis, an algorithmic approach, McGraw-Hill Book Company, New York 1972 (2nd edition).

{7} Forsythe G.E., Pitfalls in computation, or why a math book isn't enaugh, Amer. Math. Monthly 77(1970) 931-956.

{8} Forsythe G.E, Malcolm M.A., Moler C.B., Computer methods for mathematical computations, Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1977.

{9} Dijkstra E.W., Go To Statement Considered Harmful, Comm. ACM 11(1968), 147-148.

{10} Brained W. (editor), FORTRAN-77, Comm. ACM 21(1978) 806-820.

{11} Kernigan B.W., Plauger P.J., Programming Style, Examples and Counterexamples, Computing Surveys 6(1974) 303-316.

{12} Kernigan B.W., Plauger P.J., The elements of programming style, Bell telephone laboratories 1974.

{13} Meek B., FORTRAN, PL/I and the ALGOL's , Macmillan Press London 1978.

{14} Robertson D., Tableless Date Conversion, Comm. ACM 15(1972) 918.

{15} Barnett V.D., The Behavior of Pseudo-Random Sequences Generated on Computers By The Multiplicative Congruential Method, Math. Comp. 16(1962) 63-69.

{16} Frey P.W. (editor),Chess Skill In Man And Machine, Springer Verlag 1977.

{17} Berliner H.J., A chronology of computer chess and its literature, Artificial Inteligence 10(1978), 201-214.

Στό βιβλίο αὐτό ὁ ἀναγνώστης ἔρχεται ἀπό τήν πρώτη κι᾽ ὅλας σελίδα σ᾽ ἐπαφή μέ προγράμματα. Μέ τήν βοήθεια προγραμμάτων-παραδειγμάτων καί ἀσκήσεων (λυμένων) δίδεται ἡ εὐκαιρία στόν ἀναγνώστη νά ἐμβαθύνη καί νά σχηματίση δική του πρακτική πείρα τῶν προβλημάτων καί δυνατοτήτων τοῦ προγραμματισμοῦ δίχως νά περιπλανιέται σέ ἀόριστες περιγραφές καί θεωρίες. Τό βιβλίο μπορεῖ νά χρησιμεύση σάν βοήθημα ἑνός μαθήματος προγραμματισμοῦ, σάν συλλογή ἀσκήσεων (περιέχει 270 λυμένες ἀσκήσεις) ἤ ἀκόμη σάν μέθοδος γιά αὐτοδίδακτους πού ἔχουν δυνατότητα ἐργασίας μέ κάποιο ὑπολογιστή.